

Elektrotehnički fakultet u Beogradu  
Signali i Sistemi  
Biomedicinsko inženjerstvo

**DIPLOMSKI RAD**  
**Fraktalna dinamika hoda**

Novembar 2007

Mentor: prof Mirjana B Popović

Student: Olga Grbović 02/010

## SADRŽAJ

SIGNAL .....	3
Parametri hoda .....	3
Koračni intervali .....	5
FRAKTALI.....	8
Fraktalne strukture.....	8
Fraktalna dimenzija .....	11
Multifraktali.....	15
ALGORITAM .....	19
Fraktalna dinamika hoda.....	19
Higuchi-jeva analiza .....	24
Higuchi-jev algoritam .....	28
Multifraktalna analiza .....	32
PRILOG .....	34
LITERATURA.....	38

## SIGNAL

### Parametri hoda

Opservacija hoda odrasle osobe sugerira je da je koordinacija ovog zadatka naizgled jednostavna. Međutim, kako pojedinačni mišići ispunjavaju mehaničke zahtjeve lokomotornog zadatka ostaje kontroverzno pitanje uprkos tome što proučavanje hoda ima dugu historiju. Analize mjerenja dobijenih od ispitanika u toku hoda su sada uobičajene i postoje mnoge laboratorije opremljene instrumentima za mjerenje parametara hoda. U laboratorijama hoda se proučavaju mehanizmi koji pretvaraju kontrakcije mišića oko spojnih zglobova u obavljanje funkcionalnog zadatka – hodanja. Osim toga, naučnici nastoje da bolje razumiju vezu između ljudskog motornog kontrolnog sistema i dinamike hoda. Godine tehnološkog razvoja su dovele do izrade mnogih sistema za mjerenje položaja pojedinih djelova tijela kao i uglova između njih. Ovi sistemi mogu da se kategorišu u mehaničke, optičke, magnetne, akustične i inercijalne. Ljudsko tijelo se pri ovim mjerenjima obično posmatra kao sistem rigidnih veza povezanih zglobovima. Zbog varijacija u antropometrijskim mjerama ovi sistemi se moraju rekalibrisati za svakog korisnika. Korišćenje specijalizovane laboratorije sa fiksnom opremom ograničava mnoge primjene, kao što je snimanje dnevnih aktivnosti, kontrolisanje proteza i procjena opterećenja u ergonometrijskim ispitivanjima. U proteklih par godina, sistemi zdravstvene zaštite teže da što ranije otpuste pacijenta iz zdravstvene ustanove i da ga nakon toga prate u njegovoj sredini pomoću sistema za monitoring. Ovo je promovisalo razvoj neinvazivnih prenosivih aparata.

Studija hoda uključuje kvantifikaciju, tj. određivanje i analizu mjerljivih parametara hoda, kao i njihovu interpretaciju, tj. donošenje zaključaka o zdravlju, godištu, veličini, težini, brzini ispitanika na osnovu dobijenih vrijednosti. Analiza hoda najčešće uključuje mjerenja pomjeraja tijela u prostoru (kinematika) i mjerenja sila koje su uključene u kreiranje ovih pokreta (kinetika). Kinematika i kinetika se mogu snimiti korišćenjem različitih sistema i metodologija. Tipično, opremljena laboratorija hoda posjeduje nekoliko kamera (video ili infra-crvenih) postavljenih oko staze ili platforme za hodanje, povezanih na kompjuter. Markeri su postavljeni na tijelo pacijenta kao anatomska obilježja. Pacijent hoda po stazi i kamere bilježe trajektorije svih markera u tri dimenzije. Pozicija, brzina i ubrzanje markera postavljenih na tijelu ispitanika mogu da se izmjere ili procijene u toku hoda, kao i sila reakcije podloge i to pomoću specijalnih osjetljivih platformi ili samo vertikalna komponenta sile koristeći senzore pritiska u ulošcima za obuću. Elektromiografska (EMG) aktivnost mišića se može mjeriti površinskim ili unutrašnjim elektrodama uporedo sa mjerenjem kinematike tijela i silama reakcije podloge. Osim toga, druge biomehaničke varijable se mogu proračunati ili estimirati iz ovih mjerenja i to korišćenjem inverzne dinamike. Poznajući dinamiku svakog dijela tijela kao i silu reakcije podloge, moguće

je riješiti jednačine bazirane na Njutnovim zakonima kretanja i izračunati silu proizvedenu od strane svake mišićne grupe i ukupan moment svakog zgloba u svim etapama hoda. Tokom godina, sakupljena biomehanička mjerenja i mjerenja mišićne aktivnosti su dovela do objavljivanja kinematičkih i kinetičkih trajektorija kao i trajektorija mišićnih aktivnosti ljudskog hoda za mlade zdrave osobe, starije osobe i djecu. Kliničke dijagnoze i bazična istraživanja zavise od mogućnosti da se snime ovi signali, a smisao njihove analize i procesiranja je u ekstrakciji informacija, postavljanju dijagnoze, praćenju (monitoringu), odlučivanju o terapiji i evaluaciji efekata tretmana. Kliničke laboratorije hoda obično porede karakteristike hoda osoba sa neurološkim ili ortopedskim patologijama sa obrascima hoda zdravih osoba. Poređenjem kinematike, kinetike i obrazaca mišićne aktivnosti hoda zdravih i oboljelih osoba dobija se osnova za definisanje abnormalnog hoda. Ovakva poređenja se takođe mogu koristiti za neuromuskularnu i muskuloskeletalnu procjenu hoda, procjenu hirurškog i rehabilitacijskog tretmana, ocjenu dizajna i podesnosti proteza, kao i za razvoj sistema za Funkcionalnu Električnu Stimulaciju (FES) za osobe sa povredom kičmene moždine. Kritično za uspješno korišćenje laboratorijskih mjerenja u medicinskom tretmanu osoba sa neuromuskularno-skeletalnim patologijama je vještina kliničkog i inženjerskog tima laboratorije hoda da interpretira mjerenja dobijena od svakog individualnog pacijenta. Patološki hod može da oslikava kompenzacioni mehanizam za neku drugu patologiju ili može biti sam po sebi odgovoran za prouzrokovane simptome.

Proučavanje hoda omogućava da se postave dijagnoze i da se razviju rehabilitacione metode. Osim kliničkih primjena, analiza hoda se koristi i za treniranje profesionalnih sportista za optimizaciju i poboljšanje atletskih performansi.

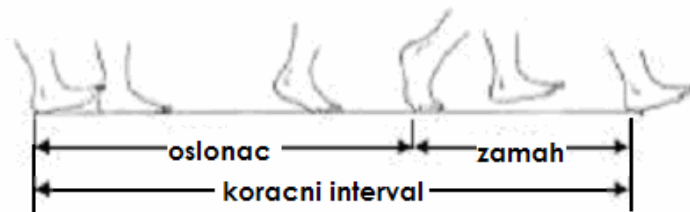
Parametri hoda su grupisani u prostorno-vremenske (dužina koraka, širina koraka, brzina hoda, trajanje koračnog intervala) i kinematičke (rotacija zglobova kuka, koljena i skočnog zgloba, prosječni uglovi rotacije zglobova, uglovi između nadkoljenice/podkoljenice/stopala).

Osnovni preduslov za analizu hoda je procjena prostorno-vremenskih parametara hoda i analiza pokreta tokom sekventnih ciklusa koraka. Ova parametrizacija hoda zahtjeva detekciju kontakata stopala i podloge. Ne samo da je identifikacija kontakta neophodna za određivanje suštinskih prostorno-vremenskih parametara hoda (dužina koraka i koračnog intervala), već je i za analizu kinematike i fizioloških signala na koje utiče hod potrebna informacija o početku i kraju koračnog ciklusa. Po konveciji, koračni ciklus je definisan kao interval između dva uzastopna kontakta desnog stopala. U laboratorijskim eksperimentima je razvijeno više metoda za identifikaciju uzastopnih koračnih ciklusa. Neki od tipičnih primjera su korišćenje električnih prekidača ili senzora pritiska na ulošcima za obuću, platformi za mjerenje sile reakcije podloge, ili analiza obrazaca premiještanja stopala. Prosječne vremenske karakteristike kao što su trajanje koraka ili zamaha i oslonca, se mogu estimirati iz podataka o ubrzanju nadkoljenice,

podkoljenice ili stopala (računanjem kroskorelacije ili frekventnom analizom). Međutim, ovakav pristup ne dovodi do precizne identifikacije pojedinačnih koračnih intervala kakva je neophodna za analizu elektromiografskih signala i ugaonog pomjeraja zglobova. Neke od ovih metoda su nepraktične ili čak neupotrebljive u van-laboratorijskim, realnim uslovima.

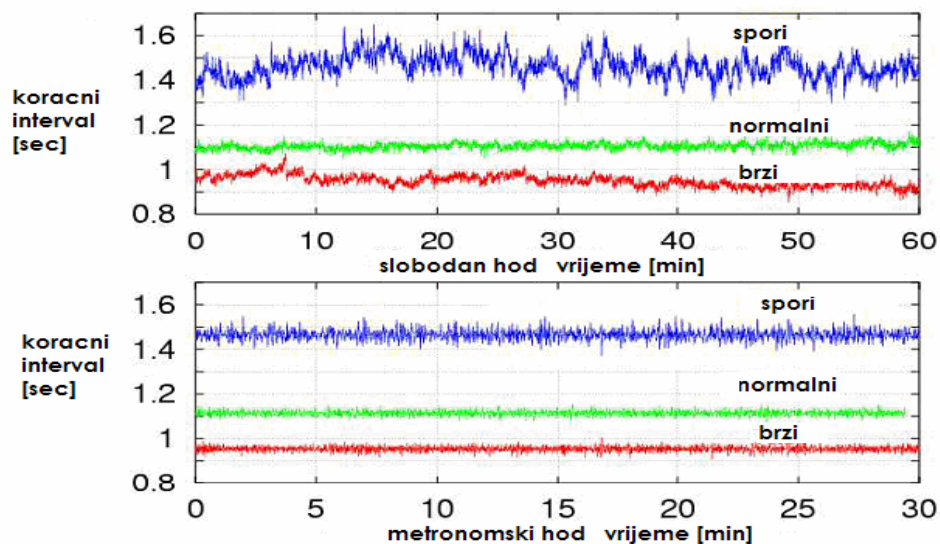
## Koračni intervali

Hodanje je kompleksan proces čijem boljem razumijevanju doprinosi nedavno otpočeta primjena nelinearnih tehnika procesiranja podataka na vremenske serije koračnih intervala. Hod se sastoji iz sekvence koraka podijeljivih u dvije faze: faza oslonca i faza zamaha. Faza oslonca počinje kada stopalo dodirne pod i završava se kada se podigne sa poda. Faza zamaha počinje kada se stopalo odvoji od poda i završava se kada ponovo dodirne pod. Koračni interval je vrijeme potrebno da se kompletiraju obje faze, kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1. Faza oslonca i faza zamaha

Tipične vremenske serije koračnih intervala odraslog ispitanika, snimane prilikom slobodnog i metronomom diktrinog hoda, za normalni, spori i brzi tempo su date na slici 2 (podaci preuzeti sa PhysioNeta).



Slika 2. Vremenske serije koračnih intervala

Ovi podaci su prvobitno prikupljeni i korišćeni od strane Hausdorffa et al. za određivanje zavisnosti fraktalne dimenzije vremenske serije od promjena prosječne brzine hoda. Podaci sadrže vremenske serije koračnih intervala 10 zdravih ispitanika koji su hodali sporim, normalnim i brzim tempom i to tokom vremenskog perioda od jednog sata. Isti ispitanici su onda zamoljeni da hodaju tempom diktiranim od strane metronoma koji je podešen na prosječni spori, normalni i brzi ritam i to tokom 30 minuta, čime je dobijen drugi skup podataka.

Već duže od jednog vijeka je poznato da postoji varijacija od 3-4% u trajanju koračnih intervala čovjeka, a u protekloj dekadi su Hausdorff et al. demonstrirali da vremenske serije koračnih intervala pokazuju dugoročne korelacije, navodeći na zaključak da je hodanje samoslična, fraktalna aktivnost. Kasnije studije Westa i Griffina potvrdile su tvrdnju da je vremenska serija ljudskih koračnih intervala fraktalna. Međutim, nedavno je pokazano da su ove vremenske serije u stvari slabo multifraktalne.

Analizom ovih reprezentabilnih vremenskih serija dolazi se do zaključaka: (i) odziv zdravih sistema, pod određenim uslovima kojima se kontrolišu kritični parametri, otkriva vrstu kompleksne varijabilnosti koja je povezana sa dugoročnim (fraktalnim) korelacijama, zajedno sa posebnim klasama nelinearnih interakcija (ii) multiskalirana, nelinearna kompleksnost degradira na karakterističan način sa starenjem i bolešću, smanjujući adaptivne sposobnosti subjekta. Uz to, ova manifestacija fraktalnog i nelinearnog otkaza se može kvantifikovati i potencijalno se iskoristiti u dijagnostičkim i prognostičnim aplikacijama.

Prema klasičnim konceptima fiziološke kontrole, zdravi sistemi posjeduju svojstvo samo-regulacije kojim se redukuje varijabilnost i održava fiziološka konstantnost. Nasuprot predviđanjima homeostaze, izlaz iz široke grupe sistema, kao što je normalni srčani ritam, fluktuiraju na kompleksan način, čak i u uslovima mirovanja. Skalirajuće tehnike usvojene iz statističke fizike otkrivaju prisustvo dugoročnih korelacija, koje su posledica multifraktalne strukture koja djeluje na širokom opsegu vremenskih skala. Ove skalirajuće osobine sugerišu da nelinearni regulatorni sistemi funkcionišu daleko od tačke ravnoteže, i održavanje ravnoteže nije cilj fiziološke kontrole. Osim toga, kod subjekata sa visokim rizikom od iznenadne smrti (kao posledica prestanka rada srca), fraktalna organizacija, zajedno sa nekim nelinearnim interakcijama, otkazuje.

Definišuća osobina zdravog funkcionisanja je adaptibilnost, sposobnost sistema da odgovori na nepredvidive stimuluse i stresove. Funkcionalna adaptibilnost zahtijeva širok opseg integrisanih odziva. Fraktalna fiziologija, ovdje pokazana na primjeru ljudskog hoda, može biti adaptivna iz barem dva razloga: (i) dugoročne korelacije koriste kao samo-organizujući mehanizam za visoko kompleksne procese koji generišu fluktuacije duž širokog opsega vremenskih skala (ii) nepostojanje karakteristične skale sprečava pojavu periodičnog ponašanja (zaključavanja modela) koje bi značajno smanjilo osjetljivost sistema. Prethodni zaključak

podržavaju otkrića istraživanja rađenih na životno ugroženim ispitanicima sa srčanim problemima, gdje je otkaz fraktalnih korelacija obično praćen pojavom dominantnog moda (npr. Cheyne-Stokes frekvencija disanja). Prelasci u izrazito periodičnu dinamiku su primijećeni i kod mnogih drugih patologija, uključujući Parkinsonovu bolest (tremor), obstruktivnu apneju, iznenadan srčani otkaz, epilepsiju, itd.

Fluktucije u koračnim intervalima u okolini proizvoljnog trenutka u vremenu su statistički korelisane sa fluktuacijama koje su se javile stotinama koraka unazad, i ovaj uticaj opada na skalirajuće invarijantan, fraktalan način. Mehanizmi odgovorni za ove korelacije koračnih intervala su nepoznati. Oni mogu biti posledica perifernog ulaza ili niže motornoneuralne kontrole, ali mogu biti i povezani sa višim centrima nervnog sistema koji kontrolišu ritam hoda. Iako otkaz dugoročnih korelacija tokom hoda diktiranog metronomom sugerise da supraspinalni uticaji mogu da nadjačaju normalno prisutne dugoročne korelacije, njihov izvor i funkcija i dalje ostaju neodređeni. Da bi se dobio uvid u ovu dugoročnu zavisnost, ispitavani su uticaji starenja i neurodegenerativnih poremećaja na koračne intervale. Starenje je povezano sa brojnim neurofiziološkim promjenama koje mogu da utiču na sposobnost lokomotornog sistema da generiše korelisane koračne intervale. Ove promjene uključuju smanjenu provodnost nerava, gubitak motornih neurona, usporene reflekse, redukovana propriocepcija i oslabljena snaga mišića, kao i smanjenje mogućnosti centralnog procesiranja. Magnituda ovih promjena povezanih sa starenjem uveliko zavisi od individualnog zdravstvenog stanja. Međutim, do određenog stepena, ove promjene se izgleda mogu uzeti kao dio "normalnog" starenja. Tako zdravi stariji ispitanici mogu da posluže za modeliranje finih, jedva primjetnih promjena u neuromuskularnoj kontroli. Huntington-ova bolest je autosomalno-dominantna neurodegenerativna bolest centralnog nervnog sistema. Primarne kliničke odlike su kognitivne i karakterne promjene. Većina patoloških promjena se mogu vidjeti u bazalnoj gangliji. Međutim, mehanizmi kojima ove promjene utiču na sposobnost bazalne ganglije da reguliše motornu kontrolu nisu objašnjeni. Krajnji rezultat ovih promjena je da oboljeli od Huntingtonove bolesti obično ispoljavaju nekontrolisane "razigrane" pokrete i ataksiju hoda.

Algoritam je testiran na skupu podataka dostupnih u javnoj arhivi PhysioNet. "PhysioNet" je World Wide Web resurs koji se sastoji iz tri međusobno zavisne komponente: (i) PhysioBank je velika i rastuća arhiva veoma dobro okarakterisanih digitalnih snimaka fizioloških signala. Trenutno dostupne baze podataka uključuju multiparametarske kardiopulmonarne, neuralne i druge biomedicinske signale snimane sa zdravih ispitanika kao i ispitanika sa različitim zdravstvenim problemima, kao što su srčane aritmije, kongestivni srčani otkaz, apnea, neurološki poremećaji i starenje. (ii) PhysioToolkit je biblioteka open-source softvera za procesiranje i analizu fizioloških signala i detekciju fiziološki značajnih događaja i to korišćenjem klasičnih tehnika kao i novih metoda baziranih na statističkoj fizici i nelinearnoj dinamici. (iii) PhysioNet je

online forum za širenje i razmjenu snimljenih biomedicinskih signala i open-source softvera za njihovu analizu i procesiranje.

## FRAKTALI

### Fraktalne strukture

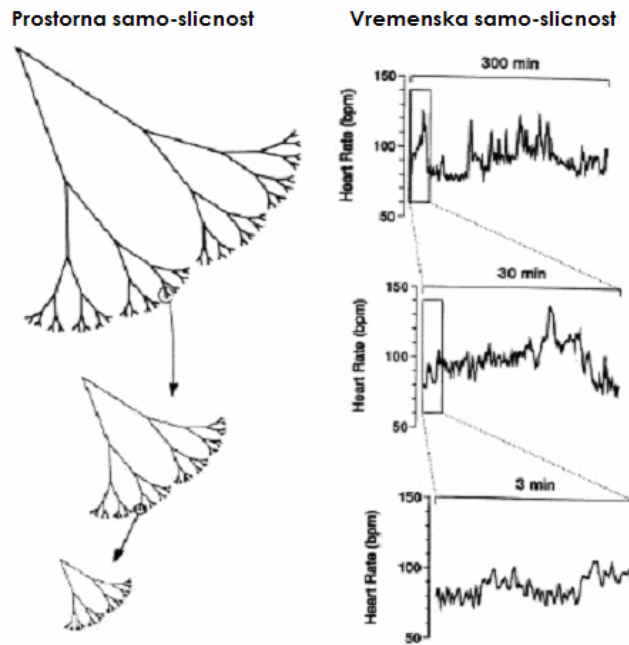
Za opisivanje objekata i fenomena u prirodi koriste se različite mjere koje nazivamo dimenzije. Da bismo što bolje okarakterisali određeni objekat potrebno je da koristimo više različitih deskriptora. Upotrebom adekvatne dimenzije vještački generisani objekti se veoma lako opisuju. Dimenzije takvih objekata se mogu izmjeriti i numerički izraziti poređenjem sa referentnom jediničnom mjerom. Najpoznatije dimenzije u upotrebi su Euklidska dimenzija  $D_E$  i topološka dimenzija  $D_T$ . Obije dimenzije mogu da uzimaju samo cjelobrojne vrijednosti 0,1,2, ... i za veliki broj objekata imaju istu vrijednost. Međutim, razlike postoje i jasno se vide iz načina na koji su dimenzije definisane. Topološka dimenzija se definiše na osnovu toga kako posmatrani objekat može da se izdijeli na gradivne elemente, dok Euklidska dimenzija uzima u obzir prostor koji objekat zauzima. Na primjer, tačka je bez dimenzije jer ona nije kontinuum, pa su i Euklidska i topološka dimenzija tačke iste, tj.  $D_E = D_T = 0$ . Razlike između ove dvije dimenzije se javljaju već u slučaju linije. Sa stanovišta topološke dimenzije, linija ima dimenziju 1 bez obzira na njen oblik jer se može izdijeliti na tačke koje nisu kontinuumi. Slično, površine se dijele na linije pa je topološka dimenzija površine 2. Kako su za podjelu prostora potrebne površine, topološka dimenzija prostora je 3. Po Euklidskoj definiciji dimenzije, struktura je jednodimenzionalna ukoliko se može uklopiti na pravu liniju, dvodimenzionalna ako se može postaviti na ravnu površinu i trodimenzionalna ako zauzima prostor. Po ovoj definiciji, samo prava linija je jednodimenzionalna, jer jedino ona ne zauzima ni površinu ni prostor. Ali kriva linija koja leži na površini je dvodimenzionalna, dok je kompleksna kriva linija koja zauzima prostor trodimenzionalna. Takođe, ravna površina ima Euklidsku dimenziju dva, dok je zakrivljena površ trodimenzionalna. Dimenzije se mogu izmjeriti i broičano opisati ukoliko ih poredimo sa nekim usvojenim uzorkom (etalonom) mjere. Ili, analitički gledano, dužina linije (luka) se određuje krivolinijskim integralom, a veličina neke površine primjenom površinskog integrala.

Benoit Mandelbrot, poljski matematičar i fizičar, je skovao termin "fraktal" (*lat. fractus – izlomljen, prelomljen*) da označi objekte čija je Hausdorff-Besicovitch-ova dimenzija veća od njihove topološke dimenzije. Ilustrovao je ovu matematičku definiciju sa upadljivim kompjuterski konstruisanim vizuelizacijama. Ove su slike su osvojile javnu imaginaciju; mnoge od njih su bile zasnovane na rekurziji i sugerisale su popularno značenje termina fraktal. U svom poznatom radu "How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension", objavljenom 1967. godine u časopisu Science Magazine, Mandelbrot je prvi put uveo pojam



fraktala, što je kasnije upotpunio i sistematizovao. Tu je pokazao da je koncept dužine besmislen ukoliko se želi izmjeriti neki nepravilan objekat kao što je morska obala – dužina zavisi od izbora jedinice mjere. Analitički posmatrano, linija morske obale nije diferencijabilna u svim tačkama, tako da krivolinijski integral nije definisan.

Za opisivanje nepravilnih struktura raznih prirodnih objekata i fenomena, kao što su oblaci, izgled reljefa, razne prirodne teksture, turbulencije u atmosferi, kretanja u ekonomiji, i slično koristi se fraktalna geometrija. Centralna filozofska tema fraktalne geometrije je da priroda – mada naizgled složena – pokazuje jednu fundamentalnu osobinu poznatu kao samo-sličnost (self-similarity). Bez obzira na očiglednu kompleksnost oblika i/ili dinamičkog ponašanja sistema, ukoliko pogledamo pažljivije, možemo naći oblike na jednoj skali koji liče na one na drugim skalama. Mnogi prirodni objekti iskazuju takva svojstva, pri čemu skale mogu biti prostorne i vremenske, pa imamo samo-slične strukture i samo-slične fluktuacije. Primjeri takvih struktura i fluktuacija su dati na slici 3.



Slika 3. Fraktalne strukture i fluktuacije

Mandelbrot je, zapravo, objedinio i upotpunio neka prethodna saznanja koja su se pojavila sredinom 19. vijeka. Theodor Weierstrass (1815-1897) je pokazao da može postojati kontinualna kriva koja ni u jednoj tački nije diferencijabilna, Felix Hausdorff (1869-1942) je prvi uveo pojam necjelobrojne dimenzije, koja je veća od topološke dimenzije, zatim, Georg Cantor (1845-1918) je definisao beskonačan skup tačaka u jediničnom intervalu  $[0,1]$  koji iskazuje fraktalna svojstva – tzv. Kantorov skup (Cantor Set), Helge von Koch i Waclaw Sierpinski su

definisali pravila na osnovu kojih se mogu konstruisati fraktalne krive ili objekti (Koch curve i Sierpinski carpet), itd.

Postoje dva glavna pristupa za generisanje fraktalne strukture. Jedan je narastanjem jediničnog objekta, a drugi je konstruisanje fraktala uzastopnim dijeljenjem originalne strukture. Veliki broj fraktalnih struktura se može vještački generisati primjenom relativno prostih pravila, tako što se rezultati posle svake iteracije vraćaju ponovo u istu proceduru.

Fraktalni oblici ili signali su karakterisani sledećim svojstvima:

1. Nemaju karakterističnu dužinu - uzimanjem sve manje i manje jedinice mere dobijamo sve veću i veću izmjerenu dužinu fraktalne strukture. Razlog je taj što se oblik strukture beskonačno ponavlja ukoliko strukturu posmatramo sa sve veće blizine. Za razliku od glatke krive koja uvijek ima konačnu dužinu, fraktalna linija nije diferencijabilna pa krivolinijski integral nije definisan.

2. Posjeduju svojstvo samo-sličnosti (svojstvo invarijantne skale, skalirajuće simetrije) - skalirajuća simetrija podrazumeva samosličnost posmatranih objekata na promjenljivoj skali uvećanja, u bilo kojoj skali posmatrano, fraktalni oblici su iste ili slične strukture.

3. Imaju necjelobrojnu dimenziju - fraktalna dimenzija je osnovni analitički parametar za opisivanje struktura koje posjeduju svojstvo samo-sličnosti; dimenzija je veća od odgovarajuće topološke dimenzije nefraktalnog objekta.

Vještački generisane strukture primenom pravila koja se primjenjuju u iterativnoj proceduri mogu biti samo-slične ali u nekim slučajevima se ne povećava složenost polaznog objekta pa ovako generisani novi objekti nisu fraktalni jer imaju cjelobrojnu dimenziju. Iz toga možemo zaključiti da fraktalni objekti iskazuju svojstvo samo-sličnosti dok obrnuto ne mora da važi.

Fraktali mogu biti deterministički (navedeni ranije u tekstu) i stohastički (tj. nedeterministički). Na primjer trajektorije Braunovskog kretanja imaju Hausdorffovu dimenziju 2. Haotični dinamički sistemi se u nekim slučajevima povezuju sa fraktalima. Čak i jednostavne glatke krive mogu da pokazuju fraktalno svojstvo samo-sličnosti. Na primjer, stepena funkcija ("power-law", poznata i kao Pareto raspodjela) proizvodi slične oblike na različitim stepenima uvećanja.

Tri uobičajene tehnike za generisanje fraktala su:

Escape-time fraktali – oni su definisani rekurentnom funkcijom u svakoj tački prostora (kao što je kompleksna ravan). Primjeri ove vrste fraktala su Mandelbrotov skup, Julia skup i Ljapunov fraktal.

Iterativne funkcije – ovi fraktali se dobijaju pomoću fiksnih geometrijskih pravila zamjene. Kantorov skup, Sierpinski tepih, Peanova kriva, Kohova pahulja, Menger sundjer su neki primjeri ovakvih fraktala.

Random fraktali – generisani stohastičkim prije nego determinističkim procesima, na primjer, trajektorije Braunovskog kretanja, Levijev let, fraktalni pejzaži i Braunovo drvo.

Fraktali se takođe mogu klasifikovati prema osobini samo-sličnosti. Postoje tri tipa samo-sličnosti:

Egzaktna samo-sličnost – ovo je najstrožiji tip samo-sličnosti; fraktal se javlja u identičnom obliku na svim skalama. Fraktali generisani iterativnim funkcijama obično ispoljavaju egzaktnu samo-sličnost.

Kvazi-samo-sličnost – ovo je slobodnija forma samo-sličnosti; fraktal se javlja u približno istom obliku na svim skalama. Kvazi-samo-slični fraktali sadrže male kopije čitavog fraktala u iskrivljenoj i degenerisanoj formi. Fraktali definisani rekurentnim relacijama su najčešće kvazi-samo-slični.

Statistička samo-sličnost – ovo je najslabiji tip samo-sličnosti; fraktali imaju numeričke ili statističke mjere koje su očuvane na svim skalama. Najumjerenija definicija fraktala implicira neku vrstu statističke samo-sličnosti. Fraktalna dimenzija je sama po sebi numerička mjera koja se ne mijenja na različitim skalama uvećanja. Random fraktali su primjer fraktala koji su statistički samo-slični a da pritom ne posjeduju ni svojstvo egzaktne samo-sličnosti ni kvazi-samo-sličnosti.

## Fraktalna dimenzija

Izraz "fraktalna dimenzija" odnosi se na necjelobrojnu ili fraktalnu dimenziju bilo kog objekta. FD analiza se često koristi u procesiranju biomedicinskih signala, kao što su EEG (electroencephalographic), HRV (heart rate variability) i koračni intervali. Primjena FD u ovim okolnostima uključuje vremenski pristup, procjenjuje se FD talasnog oblika. Računanje FD talasnih oblika je korisno za detekciju tranzientnih pojava, i posjeduje dodatnu prednost brzog izračunavanja. Sastoji se iz procjene dimenzije vremenski promjenljivog signala direktno u vremenskom domenu čime se obezbjeđuje značajna ušteda u trajanju izvršavanja programa.

U fraktalnoj geometriji, fraktalna dimenzija,  $D$ , je statistička veličina koja daje indikaciju koliko fraktalni objekat popunjava prostor i to na različitim skalama uvećanja. Postoji puno specifičnih definicija fraktalne dimenzije i nijedna od njih se ne tretira kao univerzalna. Sa teoretske tačke gledišta, najbitnije su Hausdorffova dimenzija, dimenzija pakovanja  $i$ , generalnije, Renijeva dimenzija. Sa druge strane, metoda prekrivanja (box-counting) i korelaciona dimenzija se više koriste u praksi zbog jednostavne implementacije. Iako se za neke klasične fraktale ove dimenzije poklapaju, u opštem slučaju one nisu ekvivalentne.

Na primjer, koja je dimenzija Kohove pahulje? Ona ima topološku dimenziju jedan, ali ona ni u kom slučaju nije kriva – dužina krive između bilo koje dvije tačke na njoj je beskonačna. Nijedan njen dio nije niti linija niti površina. U nekom smislu, možemo za nju reći da je prevelika da bismo je smatrali jednodimenzionim objektom, ali pretanka da bi bila dvodimenzioni

objekat, što sve vodi do pitanja da li bi se Kohova pahulja najbolje mogla okarakterisati dimenzijom između 1 i 2. Ovo je samo jedan od motiva za uvođenje fraktalne dimenzije kao nove mogućnosti za analitičko opisivanje ovakvih struktura.

Za strukture koje su dobijene primenom strogo definisanih pravila, kao što su već pomenuti Kantorov skup, Kohova kriva, Sierpinski tepih, i slično, može se odrediti tzv. dimenzija samo-sličnosti,  $D_s$ , na sledeći način.

Za skup  $S$  koji je ograničen u Euklidskom  $n$ -dimenzionom prostoru kažemo da je samo-sličan ako je on unija  $N$  razdvojenih (nepreklopajućih) sopstvenih kopija, od kojih je svaka naredna skalirana skala faktorom  $r < 1$  po svim dimenzijama prostora.

Između navedenih veličina postoji sledeća veza

$$Nr^{D_s} = 1$$

odakle je dimenzija samo-sličnosti jednaka

$$D_s = -\frac{\ln N}{\ln r}$$

Fraktalna struktura dimenzije između 0 i 1 poznata je kao fraktalna prašina. Fraktalne strukture dimenzije između 1 i 2 se nazivaju fraktalnim signalima. Strukture dimenzije između 2 i 3 nazivaju se fraktalnim površinama (fraktalnim slikama), a strukture dimenzije između 3 i 4 jesu fraktalne zapremine.

Za fraktalne strukture koje nisu dobijene strogo definisanim pravilima, kao što su razne prirodne strukture i signali, fraktalna dimenzija se ne može odrediti kao dimenzija samosličnosti.

Istorijski je pojam dimenzije kao veličine koja određuje mjeru kojom objekat ispunjava prostor, čime se odzvoljava mogućnost necelobrojne dimenzije, uveo F. Hausdorff.  $D$ -dimenziona Hausdorffova mjera na skupu  $S$  je

$$M_D(S) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_k r_k^D$$

gdje je  $D > 0$  realan broj koji definiše optimalno pokrivanje datog skupa korišćenjem sfera promjenljivog radijusa  $r_k$ . Vrijednost  $D$  za koju  $M_D$  naglo prelazi iz  $\infty$  u 0 se definiše kao Hausdorffova dimenzija  $D_H$ .

U praksi je mnogo lakše raditi sa box-dimenzijom. Postoje razne druge metode koje se mogu primijeniti u tim slučajevima, a jedna od često korišćenih je tzv. box-counting metoda, ili metoda prekrivanja čime se određuje dimenzija prekrivanja (cover dimension).

Metoda se zasniva na prekrivanju fraktalnog objekta mrežom bokseva - kvadrata, u slučaju jednodimenzionih (1D) signala kao što su vremenske serije, ili kocki, u slučaju dvodimenzionih (2D) signala, kao što su signali slike. Dimenzije ivice bokseva su  $\varepsilon$ . Zatim se određuje broj nepraznih bokseva,  $N(\varepsilon)$ , dakle, broj bokseva koji prekrivaju posmatrani objekat. Rekurzivno se uzimaju boksevi različitih dimenzija i iz log-log dijagrama zavisnosti  $N(\varepsilon)$  od  $\varepsilon$ ,

dobija se fraktalna dimenzija  $D_B$ . U graničnom procesu, uzimanjem sve manjih ivica bokseva, broj bokseva  $N(\varepsilon)$ , postaje srazmeran sa  $\varepsilon^{-D_B}$ , gde je  $D_B$  box-counting dimenzija datog fraktala; dakle, dobija se

$$D_B = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}$$

Box-counting metod daje tačne procjene za fraktalne dimenzije između 1 i 1.5 kod 1D signala i 2 i 2.5 kod 2D signala, uz to je jednostavan i brzo se računa.

Kapacitivna dimenzija,  $D_C$ , uvedena od strane A.N. Kolmogorova i definiše podjelu fraktala na jednake kocke ivice  $\varepsilon$ :

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

gdje  $N(\varepsilon)$  označava minimalan broj kocki potrebnih da se pokrije skup.  $D_H$  i  $D_C$  se razlikuju već za veoma jednostavne skupove. Tako je za skup racionalnih brojeva između 0 i 1  $D_H = 0$  a  $D_C = 1$ .

Ako vjerovatnoću nalaženja tačke fraktala u  $i$ -toj kocki ivice  $\varepsilon$  obilježimo sa  $P_i(\varepsilon)$ , tada je informaciona dimenzija  $D_I$ :

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-P_i(\varepsilon) \ln P_i(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

Konačno, korelaciona dimenzija  $D_K$  je definisana sa:

$$D_K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\ln C(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

gdje je korelacioni integral dat sa:

$$C(\varepsilon) = \int_{|r| < \varepsilon} d^d r c(r)$$

$$c(s) = \iint d\mu(x_1) d\mu(x_2) \delta^d(x_1 - x_2 - s)$$

a  $c(s)$  je gustina vjerovatnoće za predefinisano rastojanje dva proizvoljna vektora  $x_1$  i  $x_2$ .

U opštem slučaju sve ove dimenzije su različite za proizvoljan fraktalni objekat. Jedino u slučaju dobro poznatih, jednostavnih fraktala, monofraktala, samo jedna dimenzija je dovoljna i važi  $D_H = D_C = D_K = D_I$ . Jedinstven "otisak prsta" multifraktalnog objekta zahtijeva uvođenje neograničene hijerarhije fraktalnih dimenzija poznate kao generalizovana fraktalna dimenzija – koncept uveden od strane H. G. E. Hentschel, P. Grassberger i I. Procaccia.

U tom cilju posmatramo d-dimenzioni sistem koji je izdijeljen na d-dimenzione kocke ivice  $\varepsilon$ . U tom slučaju

$$P_i(\varepsilon) = \int_i d\mu(x)$$

predstavlja integral mjere  $\mu$  na i-toj kocki ivice  $\varepsilon$  (to bi fizički moglo na primjer da predstavlja vjerovatnoću nalaženja elektrona u datoj zapremini). Može da se definiše "funkcija particije":

$$Z_q(\varepsilon) = \sum_i^{N_i(\varepsilon)} P_i^q$$

Rejni-informacija q-tog reda je data sa:

$$I_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \ln Z_q(\varepsilon)$$

Tada se generalizovana fraktalna dimenzija q-tog reda definiše kao:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_q}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

Koristeći ovu definiciju nalazi se da su prethodno definisane fraktalne dimenzije specijalni slučajevi generalisane fraktalne dimenzije za određene vrijednosti cjelobrojne promjenljive  $q$ . Kapacitivna dimenzija, informaciona dimenzija i koralaciona dimenzija se dobijaju iz:

$$D_C = \lim_{q \rightarrow 0} D_q = D_0$$

$$D_I = \lim_{q \rightarrow 1} D_q = D_1$$

$$D_K = \lim_{q \rightarrow 2} D_q = D_2$$

Generalisana dimenzija  $D_q$  je definisana za sve realne vrijednosti  $q$  i monotono je opadajuća funkcija po  $q$ . Postoje donja i gornja granična dimenzija  $D_{-\infty}$  i  $D_{+\infty}$  koje su povezane sa regijama skupa u kojima je mjera "najrazređenija" odnosno "najgušća".

Sljedeća relacija važi uvijek:

$$d \geq D_C \geq D_H \geq D_I \geq D_{q>1} \geq d_T$$

gdje je  $d$  Euklidska dimenzija a  $d_T$  topološka dimenzija.

Pored fraktalne dimenzije, za opisivanje fraktalnih (samoslčnih) svojstava koriste se i drugi opisivači, npr. Hurst-ov indeks (H), koji se, takođe, može određivati na razne načine: npr., na osnovu R/S statistike, metodom periodograma, indeksa disperzije (IDC), itd. Može se uspostaviti veza između fraktalne dimenzije  $D$  i Hurst-ovog indeksa u obliku

$$D = d + 1 - H$$

gde je  $d$  odgovarajuća Euklidska dimenzija posmatranog signala ili objekta. Generalno, za procese koji imaju  $H=0,5$  kažemo da su slučajni (random walk) i to je odlika standardnog Braunovog kretanja, kada nema nikakve korelacije između inkrementalnih pomeraja haotičnog kretanja čestica. Ako je  $H>0,5$  tada postoji pozitivna korelacija između inkrementalnih pomeraja: za inkrementalni pomeraj čestice u nekom trenutku  $t=t_0$ ,  $x(t_0)$ , u narednom trenutku  $t>t_0$  pomeraj će imati sličnu tendenciju – iskazuje se svojstvo samosličnosti, utoliko izraženije ukoliko je  $H$  bliže jedinici. Ukoliko je  $H<0,5$  korelacija je negativna – suprotan je karakter promene u narednom trenutku u odnosu na prethodni, pa takav sistem ima tendenciju oscilovanja.

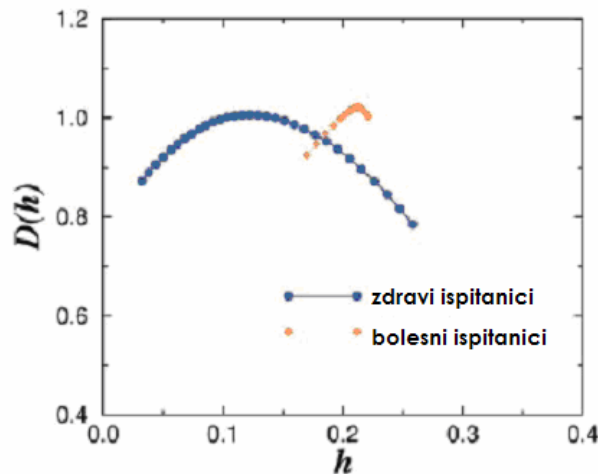
Relevantno proširenje koncepta fraktala bila je spoznaja da se on može primijeniti ne samo na iregularne geometrijske i anatomske forme koje nemaju karakterističnu dužinsku skalu, već i na kompleksne procese koji nemaju karakterističnu vremensku skalu. Hausdorf et al. su detektovali fraktalnu dinamiku u vremenskim serijama koračnih intervala ljudskog hoda koji fluktuiraju iz jednog koraka u drugi na kompleksan način. Analiza ovih fluktuacija otkrila je sličan obrazac: fluktuacije na jednoj vremenskoj skali su statistički slične fluktuacijama na više drugih vremenskih skala.

## Multifraktali

Vještački generisani objekti, primjenom precizno definisanih algoritama, iskazuju stroga fraktalna svojstva. Prirodni objekti i pojave, međutim, ne iskazuju tako stroga fraktalna svojstva, čak i kada jesu samo-slični. Prirodni objekti i pojave mogu imati statističku samo-sličnost. Na primjer, struktura morske obale, izgled reljefa ili oblaka, struktura nekih bioloških sistema ili signala, iskazuju samo-slična svojstva, ali u raznim skalama oblik nije sasvim isti, mada jeste sličan. U tim slučajevima se govori o multifraktalima. Multifraktalni parametri, kojima se mogu opisati takve pojave, mogu se iskoristiti u klasifikaciji objekata, a time omogućiti nov pristup u medicinskoj dijagnostici.

Pri analizi fizioloških vremenskih serija može se dobiti se monofraktalno ili multifraktalno ponašanje. Monofraktali su okarakterisani istim skalirajućim osobinama duž čitavog signala, oni se mogu indeksirati samo jednim globalnim eksponentom  $h_0$  (Hurstov eksponent) ili jednom fraktalnom dimenzijom, što indikuje da su oni stacionarni sa tačke gledišta njihovih lokalnih skalirajućih osobina. Multifraktali su kompleksniji, mogu se rastaviti na više podskupova okarakterisanih različitim Hurstovim eksponentima ili fraktalnim dimenzijama, koje kvantifikuju lokalno singularno ponašanje pa se samim tim odnose na lokalne skalirajuće osobine vremenske serije. Multifraktali zahtijevaju više eksponenata za karakterizaciju njihovih skalirajućih osobina; oni su suštinski kompleksniji i nehomogeniji od monofraktala.

Multifraktalni sistem je generalizacija fraktalnog sistema u kome jedan eksponent, fraktalna dimenzija, nije dovoljan da opiše njegovu dinamiku već je potreban kontinualni spektar eksponenata (takozvani spektar singulariteta). Primjer spektra singulariteta za signale srčanog ritma kod zdravog i bolesnog ispitanika dat je na slici 4. Sa slike se može uočiti da je spektar zdravog ispitanika značajno širi od spektra bolesnog ispitanika, tj. multifraktalnost slabi sa patologijom.



Slika 4. Spektar singulariteta za signale srčanog ritma

U multifraktalnom sistemu  $s$ , ponašanje sistema u bilo kojoj tački je definisano lokalnom stepenom funkcijom:  $s(\vec{x} + \vec{a}) - s(\vec{x}) \propto a^{h(\vec{x})}$ . Eksponent  $h(\vec{x})$  se naziva eksponent singulariteta i on opisuje lokalni stepen singulariteta ili regularnosti oko date tačke. Ansambl formiran od svih tačaka koje imaju isti eksponent singulariteta se naziva singularitetna cjelina eksponenta  $h$ , i predstavlja fraktalni skup fraktalne dimenzije  $D(h)$ . Kriva  $D(h)$  vs.  $h$  se naziva spektar singulariteta i u potpunosti opisuje (statističku) distribuciju promjenljive  $s$ .

Većina struktura se ne može opisati preko krajnosti tipa: crno-belo, tačno-netačno, 1-0, itd. Zbog toga se ovakvi objekti ne mogu analizirati preko skupova, već preko uopštenijih matematičkih veličina kojima mogu da se opišu nivoi u skali između krajnjih vrednosti. Te uopštenije veličine se nazivaju mjere. Slobodnije rečeno, umesto jedne mjere,  $\mu$ , javlja se skup mjera koje opisuju samosličnu pojavu. Na primjer, za definisanje mjere se mogu koristiti amplitude signala u prostornom domenu. Box-counting metod nije pogodan za opisivanje multifraktala jer on daje samo vezu između broja nepraznih bokseva i veličine bokseva, a ne uzima u obzir vrednost signala koji je obuhvaćen boksom. Za multifraktalne pojave uvodi se neka vrsta "težine" za svaki od bokseva.

Za karakterisanje multifraktala najpre se uvodi veličina  $\alpha$  opisana sa



$$\alpha = \frac{\log \mu(\text{box})}{\log \varepsilon}$$

poznata kao grubi Hölder-ov eksponent, gde je  $\mu(\text{box})$  mera boksa a  $\varepsilon$  veličina boksa. Ovako definisana veličina  $\alpha$  bi odgovarala fraktalnoj boks-dimenziji posmatrane mjere. Pokazuje se da veličina  $\alpha$  uzima vrednosti iz intervala  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ , sa  $0 < \alpha_{\min} < \alpha_{\max} < \infty$ . Vrijednost parametra  $\alpha$  je bliska odgovarajućoj fraktalnoj dimenziji posmatrane strukture, dakle, za 1D signale je raspodijeljena oko vrijednosti 1, za 2D signale oko vrijednosti 2, itd.

Zatim se posmatra frekvencijska raspodela  $\alpha$  na sledeći način. Za svaku vrednost  $\alpha$  odredi se broj  $N_\varepsilon(\alpha)$  bokseva ivice  $\varepsilon$  koji imaju grubi Hölder-ov eksponent jednak  $\alpha$ . Kako je ukupan broj bokseva ivice  $\varepsilon$  srazmeran sa  $\varepsilon^{-d}$ , gde je  $d$  Euklidska dimenzija boksa, vjerovatnoća da se među boksevima nađe onaj sa grubim Hölder-ovim eksponentom  $\alpha$  iznosi  $p_\varepsilon(\alpha) = \frac{N_\varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^{-d}}$ . Crtanje raspodjele ove vjerovatnoće ne bi dalo željeni rezultat, jer pri  $\varepsilon \rightarrow 0$  ova raspodjela ne teži graničnoj vrednosti.

Umesto toga uvodimo težinske logaritme i posmatramo funkciju

$$f_\varepsilon(\alpha) = \frac{-\log N_\varepsilon(\alpha)}{\log \varepsilon}$$

Kada  $\varepsilon \rightarrow 0$ , funkcija  $f_\varepsilon(\alpha)$  teži graničnoj definisanoj vrijednosti  $f(\alpha)$ . Ovako definisana funkcija  $f(\alpha)$  označava da za svako  $\alpha$  broj bokseva raste pri smanjenju  $\varepsilon$ , po zakonitosti

$$N_\varepsilon(\alpha) \propto \varepsilon^{-f(\alpha)}$$

Eksponent  $f(\alpha)$  je kontinualna funkcija od  $\alpha$ . Najčešće, grafik  $f(\alpha)$  ima oblik matematičkog simbola  $\cap$ , uobičajeno nagnutog na jednu stranu. Vrednost  $f(\alpha)$  bi se mogla protumačiti kao fraktalna dimenzija podskupa boksova dimenzije  $\varepsilon$  koji imaju grubi Hölder-ov eksponent  $\alpha$  kada  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Naime, kada  $\varepsilon$  teži ka 0, povećava se broj podskupova od kojih je svaki karakterisan posebnom vrijednošću  $\alpha$  i fraktalnom dimenzijom  $f(\alpha)$ . Ovo je jedan od razloga za uvođenje pojma multifraktala.

Postoji više načina za određivanje funkcije  $f(\alpha)$ . Jedan od metoda je metod momenata. Ovaj metod daje tačan rezultat, ali je komplikovan za izračunavanje. Nasuprot tome, A.Chhabra i R. Jensen su razvili jednostavniji i znatno precizniji metod za izračunavanje spektra  $f(\alpha)$  neke multifraktalne strukture.

Intuitivna slika o unutrašnjoj strukturi multifraktala se dobija uvođenjem  $f(\alpha)$ -spektra. Kreće se od ideje da je integrisana mjera  $P_i(\varepsilon)$  oblika

$P_i(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\alpha_i}$  gdje  $\alpha_i$  predstavlja fraktalnu dimenziju u  $i$ -toj kocki i može da varira od kocke do kocke. Prema skalirajućoj hipotezi, broj kocki  $dN_\alpha$  u kojima  $\alpha_i$  ima vrijednost  $\alpha$  i  $\alpha + d\alpha$  zavisi od  $\varepsilon$  kao:

$$dN_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{-f(\alpha)} n(\alpha) d\alpha$$

Znači  $f(\alpha)$  odgovara fraktalnoj dimenziji podskupa na kome  $\alpha_i$  ima vrijednost  $\alpha$ . Prema ovoj interpretaciji, multifraktal se može vizuelizovati kao ansambl isprepletanih nezavisnih monofraktala dimenzije  $f(\alpha_i)$ .

Definiše se jedno-parametarska skupina mjera  $\mu_i(q)$ :

$$\mu_i(q, \varepsilon) = \frac{[P_i(\varepsilon)]^q}{\sum_j [P_j(\varepsilon)]^q}$$

Parametar  $q$  se može shvatiti kao neka vrsta mikroskopa koji uveličava različite oblasti fraktala. Za vrijednosti  $q > 1$  pojačavaju se jako singularne strukture, za vrijednosti  $q < 1$  ističu se manje singularne strukture dok se za  $q = 1$  replicira originalna vrijednost  $\mu(1)$ . Informaciona dimenzija za  $\mu(q)$  je data sa:

$$f(q) = \frac{\sum_i \mu_i(q, \varepsilon) \ln \mu_i(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}$$

pa se srednja jačina singulariteta:

$$\alpha_i = \frac{\ln P_i(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$$

dobija iz izraza:

$$\alpha(q) = \frac{\sum_i \mu_i(q, \varepsilon) \ln P_i(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$$

Postoje varijante izračunavanja ove funkcije na osnovu geometrijskih pokazatelja i prema probablističkoj teoriji.

Neke opšte osobine  $f(\alpha)$  krive su:

$f(\alpha)$  je konveksna jednogrba funkcija sa maksimumom u tački  $q=0$  gdje je  $f(\alpha_0) = D_0$  kapacitivna dimenzija. Za  $q = \pm\infty$  nagib je beskonačan i  $\alpha_{\min} = D_{+\infty}$  odnosno  $\alpha_{\max} = D_{-\infty}$ . Za  $q=1$  dobija se informaciona dimenzija  $D_1 = f(\alpha_1) = \alpha_1$  sa prvim izvodom  $f'(\alpha_1) = 1$ . U slučaju monofraktala  $f(\alpha)$  kriva se pretvara u tačku.

## ALGORITAM

### Fraktalna dinamika hoda

Korišćenje fraktalne geometrije u simuliranju prirodnih fizičkih objekata, pojava i sistema, a zatim njihova kompjuterska vizualizacija, predstavljaju jedan pravac rada u ovoj oblasti. Inverzan problem predstavlja veliki izazov fraktalne geometrije: izdvajanje karakteristika modela koji najbolje opisuje fizički proces, uz pomoć nekog dobro definisanog i robusnog parametra, kao što su fraktalni ili multifraktalni parametri. Poslednjih godina razvijeni su mnogi algoritmi za izdvajanje karakterističnih fraktalnih ili multifraktalnih parametara iz posmatranog skupa podataka. To nalazi konkretnu primenu u prepoznavanju oblika, obradi, kompresiji, analizi i sintezi slika, analizi i predikciji savremenog telekomunikacionog saobraćaja, kao i drumskog saobraćaja, analizi meteoroloških podataka, analizi biomedicinskih signala i oblika kao i raspodele ljudske populacije, itd.

Trajanje jednog ciklusa hoda se naziva koračni interval i tipično se mjeri kao vrijeme između dva uzastopna spuštanja iste pete na pod. Vizuelnim ispitivanjem vremenske serije koračnih intervala zdravog ispitanika dobijene pri snimanju pod konstantnim spoljnjim uslovima primjeuje se da iako je interval koraka prilično stabilan (varira između 1.1 i 1.4 sekunde), on fluktuirao oko srednje vrijednosti (puna linija) na očigledno nepredvidljiv način. Ključno pitanje je da li ove fluktuacije predstavljaju nekorelisani random signal ili postoji fraktalna vremenska struktura. Najjednostavnije objašnjenje za ove varijacije u ritmu hoda od koraka do koraka je da one trivijalno predstavljaju nekorelisani (bijeli) šum superimponiran na u osnovi regularan proces – random fluktuacije dodate na normalni, konstantni ritam hoda. Druga mogućnost je da ove fluktuacije imaju korelacije kratkog dometa ("memoriju") što bi se očekivalo od Markovljevog procesa ili od biološkog sistema gdje postoji ekponencijalno opadanje "memorije" sistema. U tom slučaju, trenutna vrijednost koračnog intervala bi zavisila samo od najskorijih koračnih intervala, dok bi u većem vremenskom okviru fluktuacije varirale slučajno. Treća, manje intuitivna mogućnost je da fluktuacije koračnog intervala ispoljavaju dugoročne korelacije (svojsvo invarijantne skale, fraktalni fenomen). U slučaju da je ovo tačno, koračni interval u bilo kom trenutku bi zavisio (u statističkom smislu) od intervala u relativno udaljenim trenucima vremena, i ova zavisnost ("efekat memorije") bi opadala kao stepenska funkcija.

Iako je za ove tipično kompleksne signale pokazano da predstavljaju procese koji su po prirodi nelinearni, nestacionarni i neravnotežni, alati koji se koriste za analizu ovakvih odataka obično pretpostavljaju linearnost, stacionarnost i ravnotežne uslove. Takve konvencionalne tehnike uključuju analizu srednjih vrijednosti, standardnih devijacija i drugih osobina histograma, kao i standardnu analizu u spektralnom domenu. Nedavno je utvrđeno da takvi kompleksni skupovi podataka mogu da sadrže skrivene informacije, koje ovdje definišemo kao informacije

koje nije moguće izvući konvencionalnim metodama procesiranja. Takve informacije mogu biti značajne u kliničkoj praksi (u predviđanju iznenadne smrti kod srčanih bolesnika ili kardiopulmonarne katastrofe tokom hirurške operacije) kao i za proučavanje bazičnih mehanizama zdravog i patološkog funkcionisanja organizma. Fraktalna analiza je jedan od najobećavajućih novih pristupa za ekstrahovanje takvih skrivenih informacija iz fizioloških vremenskih serija. Ovo se djelimično može pripisati činjenici da nepostojanje karakteristične vremenske i prostorne skale – što predstavlja glavno obilježje fraktalnog ponašanja, predstavlja prednost u analizi bioloških sistema i usko je povezano sa adaptabilnošću odziva.

Koncept fraktalne strukture kojoj nedostaje karakteristična prostorna skala može se proširiti na analizu kompleksnih vremenskih procesa. Međutim, izazov pri detekciji i kvantifikaciji samo-sličnog skaliranja u vremenskim serijama je sledeći: iako su vremenske serije predstavljene na dvodimenzionoj ravni, one uključuju dvije različite fizičke veličine (horizontalna osa predstavlja vrijeme a vertikalna osa fizičku veličinu koja se mijenja sa vremenom). Ove dvije ose imaju različite fizičke jedinice, a čak i kad imaju iste jedinice mjere njihova suštinska fizička značenja se razlikuju. Ovaj slučaj se očigledno razlikuje od situacije kod geometrijskih krivih (kao što su morska obala i planinski vijenci), gdje iako opet imamo krivu predstavljenu na dvodimenzionalnoj ravni, ose ravni predstavljaju istu fizičku veličinu. Da bismo odredili da li je dvodimenziona kriva samo-slična, možemo uraditi sledeći test: (i) uzmemo podskup objekta i reskaliramo ga na veličinu originalnog objekta koristeći isti uvećavajući faktor za obje ose (ii) uporedimo statističke osobine reskaliranog objekta i originalnog objekta. Nasuprot ovome, da bismo pravilno uporedili podskup vremenske serije sa originalnom serijom podataka, potrebna su nam faktora uveličanja (duž horizontalne i vertikalne ose) jer ose predstavljaju različite fizičke veličine. Matematički iskazana prethodna diskusija glasi: Vremenski zavisani proces (ili vremenska serija) je samo-sličan ako važi:

$$y(t) \square a^\alpha y\left(\frac{t}{a}\right)$$

gdje  $\square$  označava da su statističke osobine obje strane jednačine identične. Drugim riječima, samo-sličan proces  $y(t)$ , sa parametrom  $\alpha$  ima identičnu raspodjelu vjerovatnoće kao reskalirani proces  $a^\alpha y\left(\frac{t}{a}\right)$ , tj. vremenska serija koja je po x osi reskalirana sa faktorom  $a$  ( $t \rightarrow \frac{t}{a}$ ), a po y osi faktorom  $a^\alpha$  ( $y \rightarrow a^\alpha y$ ). EkspONENT  $\alpha$  se naziva parametar samo-sličnosti.

U praksi je nemoguće utvrditi da li su dva procesa statistički identična, jer ovaj strogi kriterijum zahtijeva da oni imaju identične funkcije raspodjele vjerovatnoće (uključujući ne samo srednju vrijednost i varijansu već i više momente). Zato se ova jednakost aproksimira slabijim

kriterijumom koji ispituje samo srednju vrijednost i varijansu (prvi i drugi momenat) funkcija raspodjele oba procesa.

Parametar samo-sličnosti  $\alpha$  se može lako izračunati:

$$\alpha = \frac{\ln M_y}{\ln M_x}$$

gdje su  $M_x$  i  $M_y$  odgovarajući faktori uvećanja duž horizontalne odnosno vertikalne ose.

Za samo-sličan proces sa  $\alpha > 0$ , fluktuacije se povećavaju sa veličinom prozora srazmjerno stepenoj funkciji (power-law). Dakle fluktuacije u većim prozorima obzervacije su eksponencijalno veće od fluktuacija u manjim prozorima. Kao posledica toga, ovakve vremenske serije su neograničene. Međutim, većina fizioloških serija koje se ispituju, kao što su srčani ritam i koračni intervali, su ograničene – one ne mogu imati proizvoljno velike amplitude bez obzira koliko je dugačka serija snimljenih podataka. Ova praktična restrikcija proizvodi dodatnu komplikaciju za analizu snimljenih fizioloških vremenskih serija.

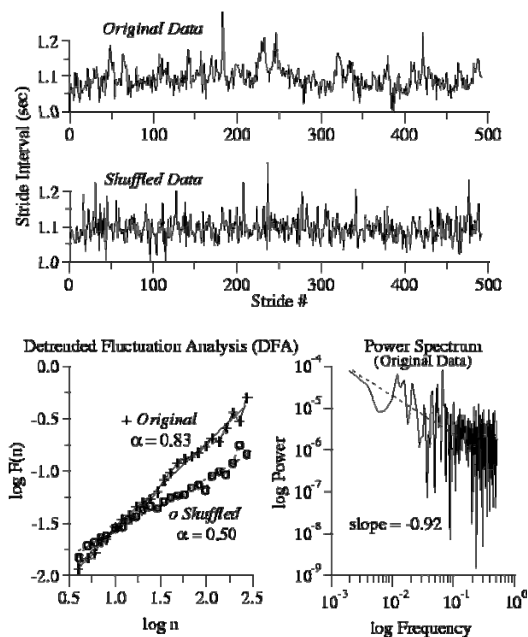
Da bismo vizuelizovali ovu samo-sličnost, ne moramo da reskaliramo y-osu ( $M_y = 0$ ) – potrebno je reskalirati samo x-osu. Odatle slijedi da je parametar samo-sličnosti a takođe nula, što nije informativan rezultat. Skup podataka koji sadrži bijeli šum takođe ima parametar samo-sličnosti nula. Postavlja se pitanje kako razlikovati trivijalni parametar nula u slučaju nekorelisanog šuma od netrivialnog parametra nula izračunatog iz originalnih snimljenih podataka.

Rešenje je da se posmatrju fraktalne osobine akumulisane (integrirane) vremenske serije, umjesto originalne serije snimljene sa ispitanika. Jedan dobro poznat primjer iz fizike koji ima značaj i za biologiju je dinamika Braunovskog kretanja. U ovom slučaju, random sila (šum) koja djeluje na čestice je ograničena, slično kao fiziološke vremenske serije. Međutim, trajektorija, dobijena integracijom svih sila koje djeluju na čestice, nije ograničena i iskazuje fraktalne osobine koje se mogu kvantifikovati parametrom samo-sličnosti. Zaista, pokazano je da kada se primijeni fraktalna skalirajuća analiza na integriranu originalnu vremensku seriju i integrirani bijeli šum dobijaju se različiti parametri samo-sličnosti, tj. ovaj parametar može da razgraniči između originalnog skupa podataka i kontrolnog randomizovanog skupa. Znači, za ovu metodu skalirajuće fraktalne analize, ključan korak u analizi fizioloških vremenskih serija je integracija istih, nakon čega slijedi izračunavanje fraktalnih parametara koristeći tehnike fraktalne analize.

Za grupu od deset odraslih zdravih ispitanika, Hausdorff et al. su potvrdili da skalirajući eksponenti  $\alpha$  i  $\beta$  (parametar samo-sličnosti i eksponent spektra snage signala koji je oblika  $f^{-\beta}$ , respektivno) pokazuju postojanje dugoročnih korelacija odnosno fraktalnog ritma hoda (slika 5). Nakon random premiještanja podataka iz originalne vremenske serije koračnih intervala,  $\alpha$  se približava vrijednosti koja odgovara potpuno nekoresanom procesu (0.50). Vremenska serija

dobijena premiješanjem podataka ima istu srednju vrijednost i varijansu kao originalna vremenska serija, čime se pokazuje da je fraktalno svojstvo zdravog ritma hoda posledica sekvencijalnog rasporeda koračnih intervala, a ne prvog ili drugog momenta vremenske serije. Pored toga, i DFA i analiza spektra snage pokazuju da jedva primjetne varijacije u ritmu hoda nisu nasumične. Umjesto toga, vremenske serije pokazuju dugoročne korelacije i to za tri različite brzine hoda. Fraktani skalirajući indeksi  $\alpha$  i  $\beta$  ostaju prilično konstantni uprkos suštinskim promjenama u brzini hoda i srednjoj vrijednosti koračnog intervala. Za sve ispitanike i za sve tri brzine hoda, vremenske serije koračnih intervala ispoljavaju dugoročne, fraktalne korelacije tokom nekoliko hiljada koraka. Ovi nalazi navode na zaključak da je fraktalna dinamika ritma hoda prilično robusna i vjerovatno urođena ljudskom lokomotornom sistemu.

#### Fractal Dynamics of Gait During 9 Minute Walk



Slika 5. Primjer vremenskih serija koračnih intervala prije i poslije random premiješanja podataka, Detrendovana analiza fluktuacija i spektri snaga za oba signala. Struktura originalne vremenske serije se gubi nakon random premiješanja podataka. DFA pokazuje da ova struktura predstavlja fraktalni proces sa dugoročnom korelacijom ( $\alpha = 0.83$ ). Preuzeto iz [1]

Nakon ovoga, ispitanici su zamoljeni da hodaju prateći otkucaje metronoma koji je podešen za svakog kandidata posebno na srednju vrijednost njegovog koračnog intervala. Cilj ovog testa je da se okarakteriše biloški sat koji kontroliše kretanje. Hod diktiran metronomom i običan, neforsirani hod, oba koriste isti mehanički sistem, iste generatore sile i iste mreže za povratnu spregu. Otkaz fraktalne dinamike tokom metronomom regulisane brzine hoda pokazuje da uticaji iznad kičmene moždine (koja predstavlja metronom u ljudskom organizmu) mogu da ponište dugoročne korelacije. Ovo otkriće je interesantno jer demonstrira da je supra-

spinalni dio nervnog sistema odgovoran za generisanje robusnog, fraktalnog obrazca kod zdravog hoda.

Promjene u funkciji centralnog nervnog sistema utiču na fraktalni obrazac ritma hoda. Da bi se testirala ova hipoteza, urađene su sistematske studije o efektima starenja i neurodegenerativnih poremećaja na fraktalnu dinamiku ljudskog hoda.

Fluktuacije koračnog intervala su nasumičnije (manje korelisane) kod starijih ispitanika nego kod mladih, a to je razlika koja se ne može uočiti poređenjem prvog i drugog momenta vremenskih serija. Ovi rezultati se dobijaju za sve ispitanike u ovim grupama, iz čega se zaključuje da postoji do sada nedektovana promjena u fraktalnom skaliranju hoda kod zdravog starenja. Čak i kod zdravih starijih osoba koje imaju normalne parametre hoda i funkcije donjih ekstremiteta, fraktalni parametri hoda su značajno promijenjeni u odnosu na mlađe zdrave ispitanike.

Interesantno, iako se korelacijske osobine koračnog intervala razlikuju kod mladih i starijih osoba, prvi momenat, prosječni koračni interval, je sličan kod obje grupe (stariji:  $1.05 \pm 0.10$ ; mladi:  $1.05 \pm 0.07$ ). Magnituda varijabilnosti od koraka do koraka (tj. koeficijent varijacije koračnog intervala) je takođe veoma slična kod obje grupe (stariji:  $2.0 \pm 0.7\%$ ; mladi:  $1.9 \pm 0.4\%$ ). Ovi rezultati pokazuju da iako je različito za dvije starosne grupe, uobičajene mjere hoda i pokretljivosti starijih ispitanika koji su učestvovali u ovom ispitivanju nisu značajno promijenjene sa starenjem.

Iz praktične kliničke perspektive, gubljenje dugoročnih korelacija u ljudskom hodu sa starenjem je interesantno iz više razloga. Kvantitativna procjena fraktalnih svojstava kretanja daje važnu mogućnost da se na jednostavan način dobiju bitne informacije o nestabilnosti pri hodu kod starijih ljudi. Padovi su glavni uzrok nepokretnosti i smrti među starijom populacijom. Mogućnost da se identifikuju pojedinci sa najvećim rizikom od pada, kao i da se ocjene intervencije koje su predviđene za ponovno uspostavljanje stabilnosti hoda (vježbe, korektivni ulošci za obuću, i sl.) može da ima veliki uticaj na javno zdravlje. Sa osnovnog fiziološkog stanovišta, realistični modeli dinamike hoda moraju da uzmu u obzir ne samo postojanje dugoročnih korelacija kod koračnih intervala mladih zdravih osoba, već i njihovo otkazivanje sa starenjem i u slučaju bolesti.

Zaista,  $a$  je  $0.56$  (približno kao kod bijelog šuma) kod starijeg ispitanika i  $1.04$  (približno  $1/f$  šum) kod mlađeg ispitanika. Takođe,  $a$  je  $0.40$  kod ispitanika sa Huntingtovom bolešću. Ovi rezultati pokazuju povećanje nasumičnosti i smanjenje korelaciju u trajanju koračnog intervala u poređenju sa kontrolnim ispitanikom. Uopšteno, fraktalno skaliranje je smanjeno kod osoba sa Parkinsonovom i Huntingtovom bolešću u odnosu na kontrolne, zdrave, ispitanike. Interesantan rezultat je dobijen poređenjem brzine hoda ispitanika sa Huntingtovom i Parkinsonovom bolešću: iako je parametar  $a$  najniži kod osoba sa Huntingtovom bolešću i ima srednju

vrijednost kod osoba sa Parkinsonovom bolešću, ispitanici oboljeli od Parkinsonove bolesti hodaju znatno sporije od ispitanika iz ostalih grupa, čime se dodatno potvrđuje ranije iznijeta tvrdnja da su mehanizmi odgovorni za određivanje brzine hoda nezavisni od mehanizama za regulisanje fraktalnog skaliranja.

Na osnovu rezultata dobijenih iz grupe ispitanika sa Huntingtonovom bolešću vidi se da je indeks  $\alpha$  obrnuto proporcionalan stepenu ozbiljnosti bolesti. Osim toga,  $\alpha$  je značajno niže kod ispitanika koji su u poodmaklom stadijumu bolesti nego kod ispitanika koji su u ranom stadijumu bolesti, čime se pokazuje da vremenska serija koračnih intervala sve više poprima random karakter kako bolest napreduje. Iako se fraktalno skaliranje mijenja i sa starenjem i kod određenih bolesti, veličina ovih promjena zavisi od uzroka koji ih izaziva, dodatna mjerenja dinamike hoda bi mogla da naprave razliku između različitih stadijuma bolesti i starenja, čime bi fraktalni parametri dobili specifično značenje.

## Higuchi-jeva analiza

Spektralna analiza snage se do sada konvencionalno koristila kao koristan i efikasan metod za analizu neregularnih vremenskih serija. Posebno je interesantan slučaj kada je spektar snage oblika stepene funkcije  $P(f) \propto f^{-\alpha}$ , eksponent  $\alpha$  se uzima kao indeks kojim se predstavlja stepen neregularnosti vremenske serije. U praksi, analiza eksperimentalnih podataka u domenu spektra snage se obavlja preko brze Furijeove transformacije (FFT) što za posledicu ima šumovite fluktuacije superponirane na spektar snage. Da bismo dobili stabilan indeks spektra snage  $\alpha$  moramo da usrednjimo spektar snage na relativno dugačkom intervalu za koji pretpostavimo da su fluktuacije duž cijelog intervala statistički stacionarne. Međutim, kako statističke karakteristike fluktuacija često variraju na vrlo kratkom vremenskom intervalu, nije pogodno usrednjavati vrijednost spektra snage na predugom intervalu. Razvijene su nove ideje za kvalifikaciju vremenskih serija koje pokazuju neperiodično i turbulentno ponašanje, pa je fraktalna dimenzija uvedena kao indeks za opisivanje neregularnosti vremenske serije umjesto indeksa spektra snage.

Vremenska serija koja posjeduje osobinu samo-sličnosti preko svih vremenskih skala ima spektar snage oblika stepene funkcije. Kada se takva vremenska serija  $X(j)$ , ( $j=1,2, \dots, N$ )

transformiše diskretnom Furijeovom transformacijom (tj.  $X(j) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} C_k \cos(\frac{2\pi jk}{N} - \theta_k)$  gdje su  $C_k$  i  $\theta_k$  amplituda odnosno faza za talasni broj  $k$ ), spektar snage za talasni broj  $k$  je dat sa

$P(k) = \frac{C_k^2}{N} \propto k^{-\alpha}$ . U svom radu, Higuchi je ispitao odnos indeksa  $\alpha$  i fraktane dimenzije  $D$  za osnovnu, diferenciranu i integriranu vremensku seriju.



Fraktalna kriva ima osobinu da je svaki njen dio umanjena slika cijele krive, ista ta fraktalna kriva na redukovanoj skali uvećanja. Simulirani podaci koji se koriste u Higuchi-jevom radu imaju osobine fraktalne krive na svim skalama. Drugim riječima, spektar snage je definisan u svim opsezima frekvencija jednim istim indeksom  $\alpha$ . Kada vremenska serija mijenja svoju strukturu u vremenskom domenu po određenoj karakterističnoj frekvenciji, teško je odrediti indekse spektra snage i karakterističnu vremensku skalu iz spektra snage. Tehnikom razvijenom u Higuchi-jevom radu dobijaju se stabilne vrijednosti za indekse  $\alpha$  (na osnovu veza između fraktalne dimenzije  $D$  indeksa  $\alpha$ ) i vremenska skala koja odgovara karakterističnoj frekvenciji čak i za mali broj podataka. Kada spektralna gustina snage  $P(f)$  pokazuje da je vremenska serija tipa crvenog šuma bez eminentnog peak-a, ona se prirodno aproksimira stepenom funkcijom oblika  $P(f) \propto f^{-\alpha}$ , gdje sličnost sa crvenim šumom znači da je veća snaga skoncentrisana na nižim frekvencijama, tj.  $\alpha > 0$ . U ovoj aproksimaciji, indeks  $\alpha$  je jedna od veličina kojom se opisuje neregularnost vremenske serije i ovaj metod je korišćen za analizu vremenskih serija u mnogim oblastima.

Novi koncept za opisivanje karakteristika neregularne vremenske serije je prezentovan od strane Mandelbrota. On je posmatrao fraktalni skup tačaka  $(t, X(t))$  koje formiraju grafik funkcije  $X$  definisane na jediničnom intervalu. Ukoliko se vremenska serija  $X(t)$  predstavi kao geometrijska kriva, svaki njen dio je umanjena slika cijele krive. Postavljanjem  $X(0)=0$ , reskalirana funkcija  $t^{-H} X(t)$  ima raspodjelu vjerovatnoće nezavisnu od  $t$ , gdje je  $H$  indeks koji opisuje karakteristike samo-slične krive.  $H$  može da bude bilo koji broj iz intervala  $(0,1)$ . Spektralna gustina snage ovakve krive je oblika  $P(f) \propto f^{-1-2H}$ . Za ovako definisanu vremensku seriju, poznat je odnos indeksa  $\alpha$  i fraktalne dimenzije  $D$ ,  $\alpha = 5 - 2D$  i važi za opseg  $1 < D < 2$ . Međutim odnos  $\alpha$  i  $D$  nije određen za proizvoljnu vremensku seriju koja ima spektar snage oblika stepene funkcije.

Higuchijev algoritam za računanje fraktalne dimenzije  $D$  vremenske serije:

Posmatramo vremensku seriju  $x(1), x(2), \dots, x(N)$  i od nje konstruišemo  $k$  novih serija kao:

$$x_m^k = \left\{ x(m), x(m+k), x(m+2k), \dots, x\left(m + \left\lfloor \frac{N-m}{k} \right\rfloor k\right) \right\}$$

za  $m=1, 2, \dots, k$ , gdje  $m$  označava početni trenutak u vremenu,  $k$  označava diskretni vremenski interval između tačaka, a  $[a]$  cijeli dio od  $a$ . Za svaku od vremenskih serija ili krivih  $x_m^k$ ,

dužina  $L_m(k)$  se računa kao: 
$$L_m(k) = \frac{\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N-m}{k} \right\rfloor} |x(m+ik) - x(m+(i-1)k)| (i-1)}{\left\lfloor \frac{N-m}{k} \right\rfloor k}$$

gdje je  $N$  ukupna dužina vremenske serije  $x$ , i  $\left[ \frac{N-1}{k} \right]$  je faktor normalizacije. Prosječna

dužina  $\langle L(k) \rangle$  se računa kao srednja vrijednost  $k$  dužina  $L_m(k)$  za  $m=1, \dots, k$ . Ova procedura se ponavlja za svako  $k$  iz opsega od 1 do  $k_{\max}$ , čime se dobija prosječna dužina za svako  $k$ . Na grafiku  $\ln(\langle L(k) \rangle)$  versus  $\ln\left(\frac{1}{k}\right)$ , gradijent prave koja predstavlja najbolji fit dobijen metodom najmanjih kvadrata je estimacija fraktalne dimenzije.

Da bi testirali metod za izračunavanje fraktalne dimenzije koriste se simulirani podaci  $Y(i)$  koji po definiciji i načinu generisanja imaju dimenziju  $D$ .

$$Y(i) = \sum_{j=1}^{1000+i} Z(j)$$

gdje je  $Z(j)$  Gausovski bijeli šum sa srednjom vrijednošću nula i standardnom devijacijom jedan. Vrijednost 1000 je proizvoljno izabrana da bi se izbjegao uticaj semplovanja  $Z(1)$  na  $Y(1)$ . Kako su u ovom slučaju statistički samo-slične krive mogu predstaviti u ravni,  $D$  je racional broj između 1 i 2. U slučaju  $Y(i)$ , fraktalna dimenzija je teoretski jednaka 1.5. Higuchi-jeva metoda daje stabilne vrijednosti za  $D$  i to za slučajeve  $N = 2^{15}$ ,  $N = 2^{16}$  i  $N = 2^{17}$ , pri čemu je  $D$  bliže teoretskoj vrijednosti što je broj ulaznih simuliranih podataka veći.

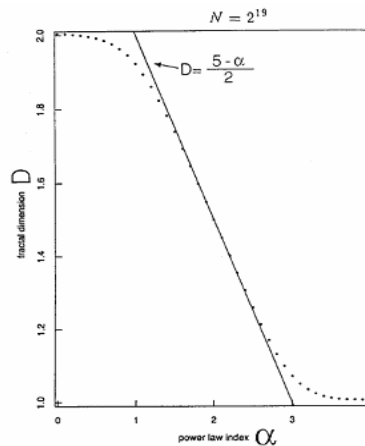
U Higuchijevom radu je takođe korišćen spektar snage za analizu neregularnih i aperiodičnih vremenskih serija. Iz literature je poznato da je kriva se jednim indeksom spektra snage samo-slična i da su indeks spektra snage  $\alpha$  i fraktalna dimenzija  $D$  povezani jednostavnom relacijom  $D = \frac{5-\alpha}{2}$ . Brza Furijeova transformacija je primijenjena na iste simulirane podatke kojima je testiran Higuchijev algoritam. Vremenski prozor širine 256 tačaka je pomjeren za 128 tačaka da bi se dobila srednja vrijednost spektra snage za ansambl. Tako se dobijaju 1024 spektra snage i oni se usrednje i rezultat prikaže na log-log dijagramu čime se dobija prava linija čiji nagib predstavlja indeks spektra snage  $\alpha$ . Iz odnosa indeksa  $\alpha$  i fraktalne dimenzije  $D$ , nađemo  $D$ . Standardna devijacija fraktalne dimenzije dobijene primjenom FFT je veća od one dobijene primjenom Higuchijevog algoritma. Kako FFT u osnovi zahtijeva srednju vrijednost ansambla spektara snage za dobijanje stabilnog spektra snage, potrebno je izvršiti značajno veći broj operacija za izračunavanje indeksa  $\alpha$  nego što je to slučaj kod Higuchijevog algoritma. Ovaj nedostatak FFT algoritma je naročito osjetan kada radimo sa velikim brojem podataka. Fraktalna analiza je efikasna i ekonomična alternativa spektralnoj analizi za ispitivanje samo-sličnih vremenskih serija.

Vremenska serija korišćena za testiranje algoritma je samo-slična na svim vremenskim skalama. U slučaju prirodnih fenomena, statističke osobine vremenske serije najčešće zavise od

vremenske skale mjerenja. Ukratko, indeks  $D$  u  $\langle L(k) \rangle \propto k^{-D}$  nije isti za sve vremenske skale. Vjerovatno je da se vrijednost  $D$  mijenja kontinualno u nekim slučajevima i ima diskontinuitete za kritične vremenske skalu drugim slučajevima.

Iako je fraktalni koncept zasnovan na ideji da je skup od interesa samo-sličan za sve vremenske skale, fraktalna dimenzija se može definisati za opseg u kome osobina samo-sličnosti važi.

Eksperimentlno je pokazano da grafik  $\alpha$ - $D$  ima oblik krive koja se približava pravoj liniji definisanoj sa  $D = \frac{5-\alpha}{2}$  za  $1 < \alpha < 3$ , poravnava se na  $D=2$  za  $0 < \alpha < 1$  i na  $D=1$  za  $3 < \alpha < 4$ . Takođe je pokazano da za bilo koje  $\alpha$ , odstupanje od ovako definisanih pravih postaje manje za veći broj semplova  $N$  (slika 6).



Slika 6. Izračunata fraktalna dimenzija  $D$  u funkciji indeksa  $\alpha$ . Preuzeto iz [2]

Predloženo rešenje za estimaciju  $\alpha$  vremenske serije  $X(j)$  je da se izračunaju  $D$ ,  $D_{\Sigma}$  - fraktalna dimenzija za integrisanu vremensku seriju i  $D_{\nabla}$  - fraktalna dimenzija za diferenciranu vremensku seriju, i to  $D_{\Sigma}$  u slučaju kada je  $D \leq 2$ , a  $D_{\nabla}$  kada je  $D \leq 1$ . Međutim, čak i ako izračunamo  $D$  i  $D_{\Sigma}$ , vrijednost  $\alpha = 1$  (1/f šum) ne može precizno odrediti zato što i  $D$  i  $D_{\Sigma}$  odstupaju od prave linije u zavisnosti od  $N$ . Isto tako za  $\alpha = 3$ , ni  $D$  ni  $D_{\nabla}$  ne daju tačnu vrijednost za  $\alpha$ .

Problem kod spektralne analize predstavlja činjenica da je oblast nižih frekvencija nesigurna zbog ograničenog broja semplova podataka. Da bismo dobili pouzdanu informaciju o dijelu spektra snage koji pokriva niže frekvencije i izračunali kritičnu frekvenciju  $f_c$ , moramo analizirati vremensku seriju duži period vremena. Kako se u slučaju fizioloških vremenskih serija statističke karakteristike mogu drastično promijeniti za veoma kratko vrijeme, ne možemo pretpostaviti stacionarnost za proizvoljno dug vremenski period – znači potrebno je

kvantitativno ispitati karakteristike serije koristeći što manji vremenski interval. U poređenju sa spektralnom analizom snage, fraktalna analiza daje stabilne vrijednosti za kritičnu učestanost i kritičnu vremensku skalu kao i indekse spektra snage.

Higuchi je analizirao vremenske serije čiji se spektar snage može opisati na sledeći način:  $P(f) \propto f^{-\alpha_L}$  u domenu niskih frekvencija i  $P(f) \propto f^{-\alpha_H}$  u domenu visokih frekvencija. Učestanost na kojoj se indeks spektra snage  $\alpha$  mijenja je  $f_c$ . Za vremensku seriju kod koje se indeks  $\alpha$  naglo mijenja, potrebno je proširiti definiciju fraktalne dimenzije sa  $D$  na  $D(\tau)$ . Fraktalna dimenzija  $D(\tau)$  je funkcija  $\tau$ , što predstavlja neregularnost fluktuacija sa vremenskom skalom  $\tau$ . Ako obilježimo kritičnu vremensku skalu sa  $\tau_c$ , osobina samo-sličnosti važi na svim vremenskim skalama kraćim i dužim od  $\tau_c$ , pa se mogu definisati dvije fraktalne dimenzije za takve vremenske serije  $D_S$  i  $D_L$ . Log-log grafik  $\langle L(\tau) \rangle$  prema  $\tau$  je kriva sa diskontinuitetom u nagibu, fitovanjem metodom najmanjih kvadrata se dobijaju dva linijska segmenta sa različitim vrijednostima gradijenta. Iz tačke preloma se nalazi  $\tau_c$ , a nagibi krivih predstavljaju  $D_S$  i  $D_L$ .

### Higuchi-jev algoritam

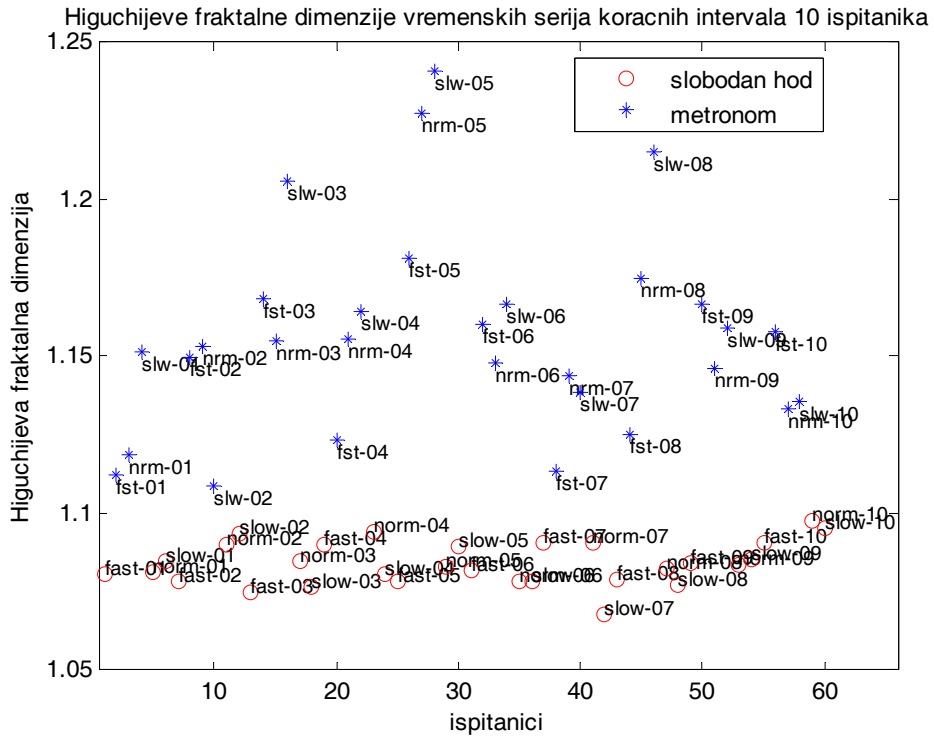
Opisani metod računanja fraktalne dimenzije je testiran na vremenskim serijama koračnih intervala u dva različita eksperimenta. U prvom je poređen slobodan hod sa metronomski diktiranim hodom, a u drugom je poređena fraktalna dimenzija dinamike hoda kontrolne grupe zdravih ispitanika sa grupama koje su formirane od ispitanika kod kojih su dijagnostifikovani patologije.

Za računanje Higuchijeve fraktalne dimenzije korišćen je Matlab program "Stride length analysis software" od T.M. Crowder and A.J.Hickey, koji je dostupan na URL: <http://www.bme.unc.edu/~tcrowder/research/>. Program je testiran na skupu podataka dostupnih u javnoj arhivi PhysioNet i modifikovan je tako da se rezultati obrade upisuju u tekstualnu datoteku. Grafički prikaz ovih rezultata (u Prilogu su dati kodovi Matlab programa) potvrđuje ranije iznijete zaključke o fraktalnoj dimenziji vremenskih serija koračnih intervala, i to:

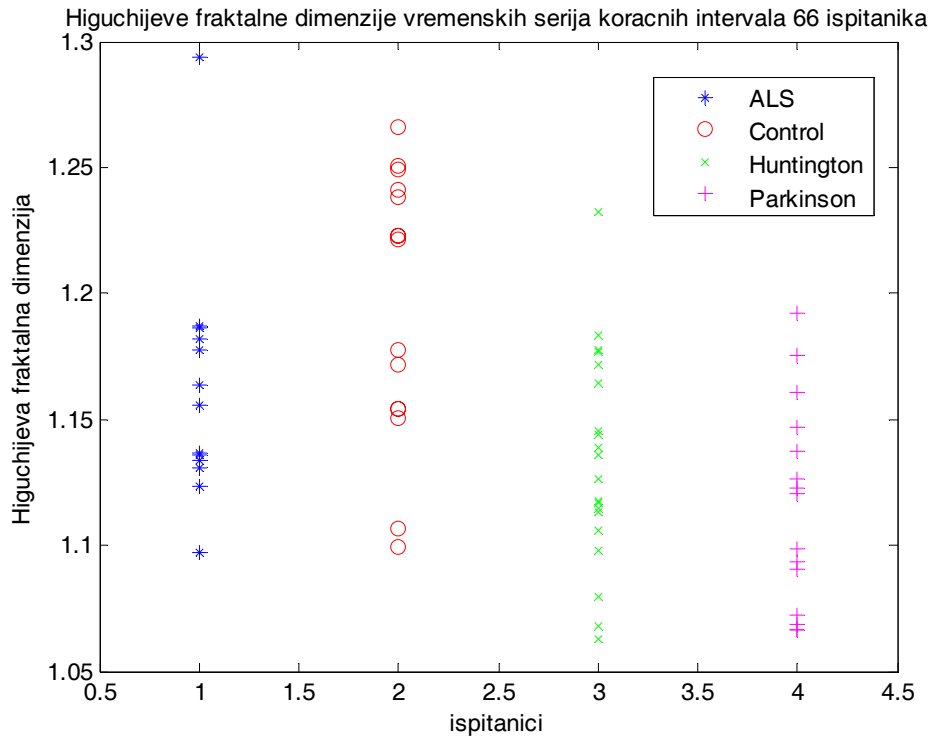
- 1) postoji jasna razlika između metronomski diktiranog i slobodnog hoda
- 2) Higuchijeva fraktalna dimenzija se ne može iskoristiti za klasifikaciju patologija, tj. u dijagnostičke svrhe.

Za prvu analizu korišćeni su vremenske serije koračnih intervala 10 zdravih ispitanika koji nemaju ni jednu neuromuskulatornu, respiratornu ili kardiovaskularnu bolest i ne uzimaju lijekove. Prosječno godište je 21.7 godina (opseg: 18-29 godina), visina  $1.77 \pm 0.08$  metara i težina  $71.8 \pm 10.7$  kg. Ispitanici su neprekidno hodali po ravnoj podlozi bez prepreka duž staze približno ovalnog oblika dužine ili 225 ili 400 metara. Za svakog ispitanika postoji 6 snimaka u trajanju od jednog sata, i to za 3 brzine hoda (normal, slow, fast) i za slobodan i metronomski hod.

Izračunata je Higuchi-jeva fraktalna dimenzija ovih vremenskih serija i dobijeni rezultati su prikazani na slici 7.



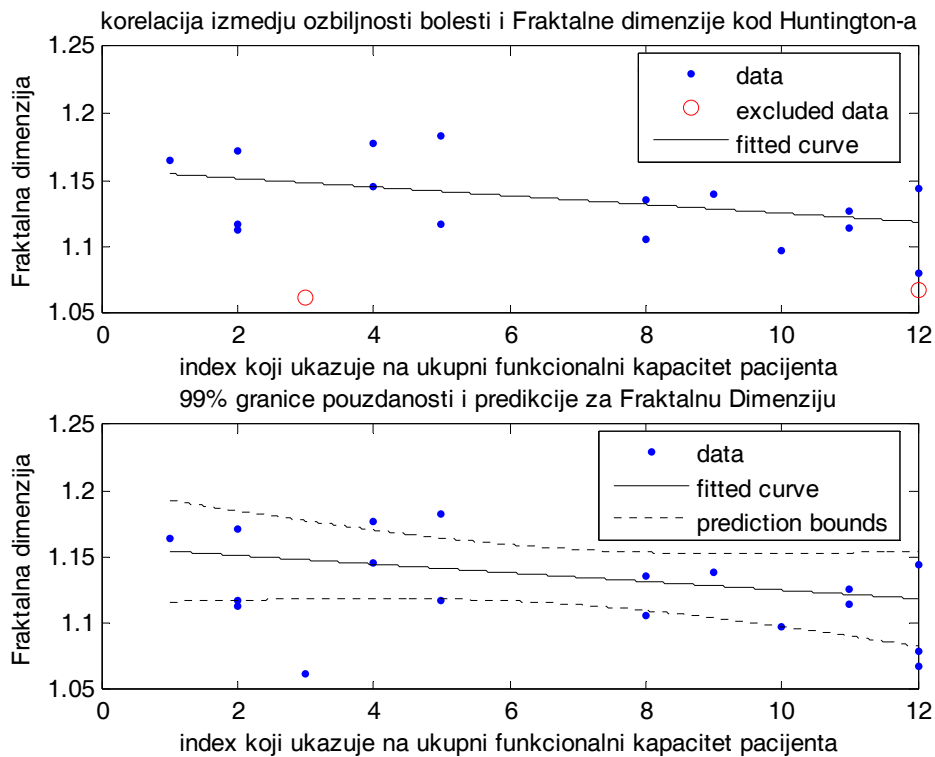
Slika 7. Metronomski i slobodan hod



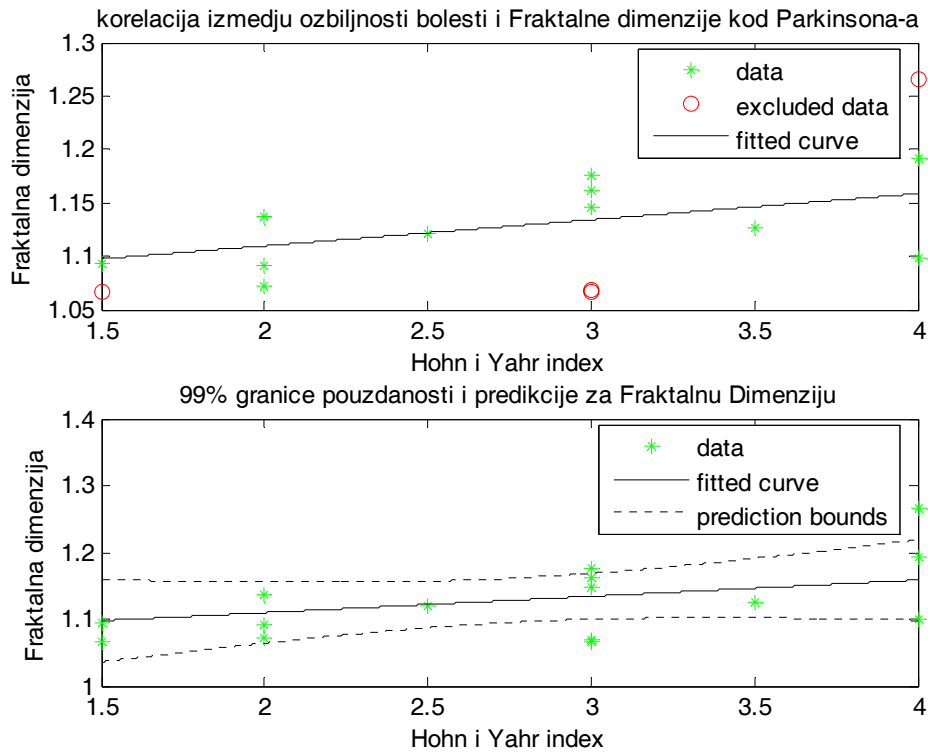
Slika 8. Fraktalna dimenzija i patologije

Za drugu analizu korišćeni su snimci ispitanika sa Parkinsonovom bolešću (grupa od 15 ispitanika), Huntington-ovom bolešću (grupa od 20 ispitanika), amiotrofskom lateralnom sklerozom (grupa od 13 ispitanika), kao i snimci hoda 16 zdravih kontrolnih ispitanika. Sa slike 8. se vidi da je nemoguće klasifikovati patologije na osnovu Higuchi-jeve FD.

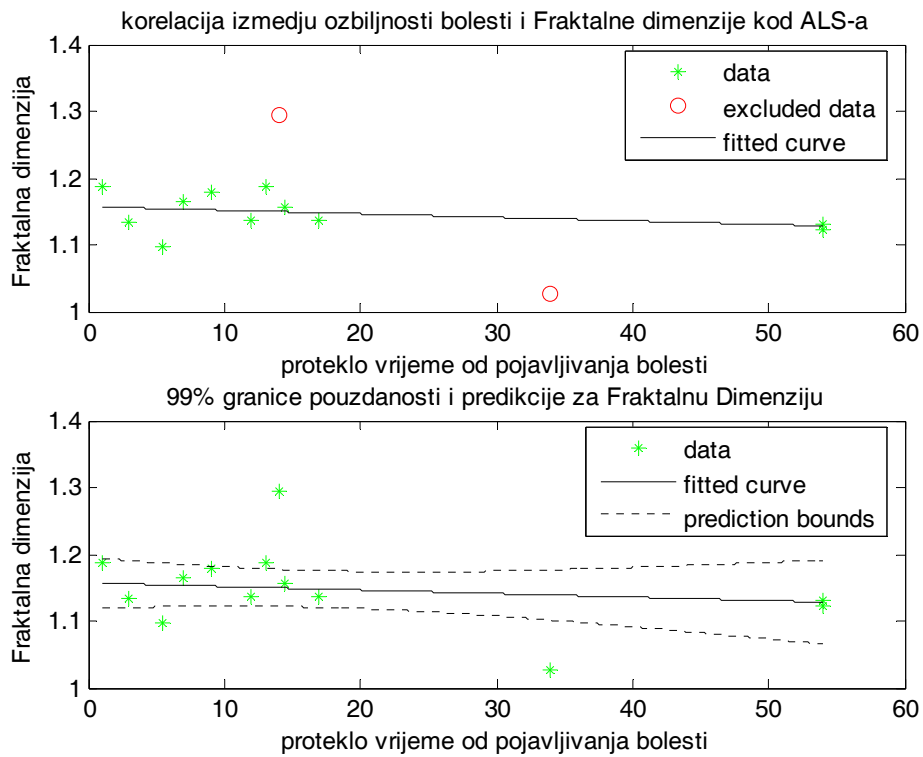
Pored vremenskih serija koračnih intervala date su i kliničke informacije o pacijentima koje uključuju i mjeru stepena napredovanja bolesti. Za pacijente sa Parkinsonovom bolešću to je Hohn i Yahr indeks (veći indeks ukazuje da je bolest uznapredovala). Za ispitanike sa Huntington-ovom bolešću to je ukupni funkcionalni kapacitet pacijenta (niži indeks ukazuje na lošiji funkcionalni kapacitet, tj. na veći stepen oboljenja). Za pacijente sa ALS-om, to je vrijeme proteklo od pojavljivanja bolesti. Zavisnosti Higuchi-jeve fraktalne dimenzije od stepena ozbiljnosti bolesti kao i najbolji linearni fit date su na slikama 9,10 i 11.



Slika 9. Huntingtonova bolest, odnos FD i indeksa koji ukazuje na ukupni funkcionalni kapacitet pacijenta



Slika 10. Parkinsonova bolest, odnos FD i Hohn i Yahr-ovog indeksa



Slika 11. ALS, odnos FD i vremena proteklog od pojavljivanja bolesti

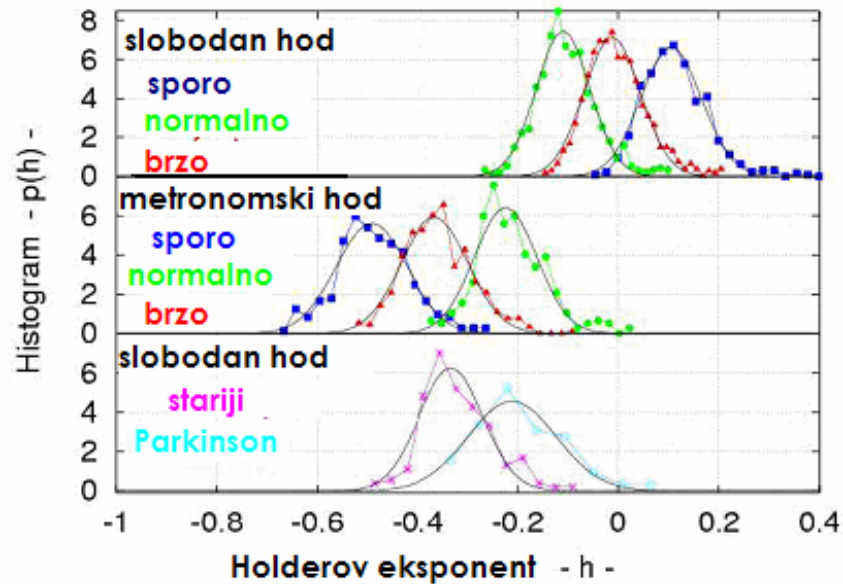
## Multifraktalna analiza

Proučavanje vremenskih serija hoda korišćenjem ne-multifraktalne analize, kao što je DFA (Detrended Fluctuation Analysis), računanje Hursvog eksponenta ili fraktalnih dimenzija (uključujući Higuchijevu fraktalnu dimenziju) ne omogućava nam da napravimo razliku između vremenskih serija koje pripadaju zdravim mlađim ispitanicima i starijim ili bolesnim ispitanicima jer iako postoje razlike u srednjoj vrijednosti i standardnim devijacijama ovih veličina, kada se uzmu u obzir pojedinačne vrijednosti za ove serije vidi se da postoje preklapanja pa je nemoguće povući granicu između ove dvije grupe.

Nedavno su West i Scafetta utvrdili da su vremenske serije hoda slabo multifraktalne, a ne monofraktalne kako se do tada smatralo. Ispitivanjem spektra Holderovih eksponenata za spori, normalni i brzi hod 10 mladih zdravih ispitanika i to i za slobodan i za metronomom diktiran hod došli su do zaključka da je vremenska serija koračnih intervala kompleksnija od monofraktalnog fenomena – za sva tri načina hoda ona je nestacionarna i ispoljava multifraktalna svojstva. Pokazali su da je multifraktalni spektar vremenske serije koračnih intervala zdravih mladih ispitanika uvijek veoma uzan, i ima skoro monofraktalno ponašanje. Multifraktalni spektar se širi kod starijih ispitanika kao i kod ispitanika kod kojih je dijagnostifikovana bolest koja utiče na hod. Zaključuje se da u slučaju hoda, multifraktalno ponašanje se javlja sa patologijom. Vremenske serije zdravih ispitanika su manje kompleksne od vremenskih serija bolesnih ispitanika.

Estimacijom distribucije Holderovih eksponenata pokazano je da vremenska serija koračnih intervala normalnog hoda pokazuje fraktalne osobine slične  $1/f$  šumu i blago je multifraktalna. Vremenska serija može biti nestacionarna i njena fraktalna varijabilnost se mijenja pod različitim režimima hoda. Ovo se naročito vidi kada se pogleda perzistencija, kao i multifraktalnost vremenske serije – povećavaju se u slučaju sporog i brzog hoda u odnosu na normalan hod. Ukoliko je tempo ograničen metronomom koji kuca u ritmu prosječne brzine hoda svakog ispitanika ponaosob, stohastičke osobine vremenske serije se drastično mijenjaju u širokom opsegu, šireći se i na perzistentne i na neperzistentne procese. Generalno, u svim slučajevima se javlja redukcija dugoročne memorije i pojačanje random osobina, što se vidi iz pomjeraja na histogramima Holderovih eksponenata (slika 7). Takođe se vidi da su Holderovi eksponenti ispitanika sa neured degenerativnim oboljenjima kao i starijih ispitanika u prosjeku manji od Holderovih eksponenata zdravih mladih ispitanika. Osim toga, Holderov eksponent značajno više varira od osobe do osobe kod starijih i bolesnih ispitanika nego kod zdravih.





Slika 12. Tipični histogrami Holderovih eksponenata vremenskih serija koračnih intervala slobodnog i metronomom diktiranog hoda za spori, normalni i brzi tempo zdravih ispitanika i ispitanika sa Parkinsonovom bolešću. Histogrami su fitovani Gausovom funkcijom. Preuzeto iz [11].

U drugoj studiji je urađena fraktalna i multifraktalna analiza vremenskih serija ljudskog hoda mladih i starih ispitanika, i odraslih osoba sa tri oboljenja koja utiču na hod: Parkinsonova i Huntingtonova bolest, kao i amiotrofska lateralna skleroza (ALS). Izračunati su Hurstov eksponent i Higučijeva fraktalna dimenzija ovih vremenskih serija i zaključeno je da ovi fraktalni markeri mogu da budu faktori za karakterisanje hoda jer su dobijene različite vrijednosti za ovih veličina za mlađe i starije ispitanike, kao i za zdrave i bolesne, pri čemu najanomalnije vrijednosti pripadaju bolesnim osobama. Međutim, analizom baze podataka vremenskih serija hoda zdravih osoba i osoba oboljelih od 3 navedene bolesti i računanjem Hurstovog eksponenta i Higuchijeve fraktalne dimenzije ovih serija ne vide se tendencije, pretpostavka je da je to zbog toga što neke vremenske serije hoda imaju monofraktalni karakter dok druge imaju multifraktalni karakter pa se ne mogu okarakterisati jednim Holderovim eksponentom ili Higuchijevom fraktalnom dimenzijom. Računanjem multifraktalnog spektra došlo se do zaključka da je spektar vremenske serije hoda kod mladih zdravih ispitanika skoro monofraktalan. Spektar bolesnih osoba je širi od spektra zdravih osoba. Nasuprot slučaju vremenske serije srčanog ritma gdje patologija implicira gubitak multifraktalnosti, u slučaju hoda, multifraktalno ponašanje se javlja sa patologijom.

## PRILOG

## Slobodan i metronomski hod:

```

close all
clear all
clc
a=[];
fid = fopen('FD.txt');
while 1
    tline = fgetl(fid);
    if ~ischar(tline), break, end
        a=cat(2,a,tline);
end
fclose(fid);
blanks=findstr(' ',a);
b{1}=a(1:blanks(1));
for i=1:(length(blanks)-1)
b{i+1}=a((blanks(i)+1):(blanks(i+1)-1));
end
for i=1:length(blanks)
if mod(i,2)==0
    c{2,i/2}=sscanf(b{i},'%f');
else
    c{1,(i+1)/2}=b{i};
end
end
for i=1:length(c)
    points=findstr('.',c{1,i});
    c{1,i}=strcat(c{1,i}(points(1)+1:points(2)-1),'-',c{1,i}(3:4));
end
for i=1:length(c)
    if strcmp(c{1,i}(1:3),'met')
plot(i,c{2,i},'*')
text(i,c{2,i},c{1,i}(4:9),'VerticalAlignment','top','FontSize',8)
    else
plot(i,c{2,i},'or')
text(i,c{2,i},c{1,i},'VerticalAlignment','baseline','FontSize',8)
%strcat(c{1,i}(1),c{1,i}(5:7))
    end
hold on
end
hold off
axis ([0.5 length(c)+6 1.05 1.25])
legend('slobodan hod','metronom','location','best')

```

```

        title('Higuchijeve fraktalne dimenzije vremenskih serija koracnih intervala
10 ispitanika');
        xlabel('ispitanici');
        ylabel('Higuchijeva fraktalna dimenzija');

```

#### Kontrolna grupa i patologije:

```

close all
clear all
clc
a=[];
fid = fopen('FDpatologije.txt');
while 1
    tline = fgetl(fid);
    if ~ischar(tline), break, end
    a=cat(2,a,tline);
end
fclose(fid);
blanks=findstr(' ',a);
b{1}=a(1:blanks(1));
for i=1:(length(blanks)-1)
b{i+1}=a((blanks(i)+1):(blanks(i+1)-1));
end
for i=1:length(blanks)
if mod(i,2)==0
    c{2,i/2}=sscanf(b{i},'%f');
else
    c{1,(i+1)/2}=b{i};
end
end
for i=1:length(c)
    points=findstr('.',c{1,i});
    c{1,i}=c{1,i}(1:points(1)-1);
end
for i=1:length(c)
    switch c{1,i}(1)
        case 'a'
            plot(1,c{2,i},'*')
        case 'c'
            plot(2,c{2,i},'ro')
        case 'h'
            plot(3,c{2,i},'gx')
        case 'p'
            plot(4,c{2,i},'m+')

```

```

        end
    hold on
    end
    hold off
    axis ([0.5 4.5 1.05 1.3])
    legend('ALS','Control','Huntington','Parkinson','location','best')
    title('Higuchijeve fraktalne dimenzije vremenskih serija koracnih intervala 66
ispitanika');
    xlabel('ispitanici');
    ylabel('Higuchijeva fraktalna dimenzija');
Korelacija između ozbiljnosti bolesti i fraktalne dimenzije:
close all
clear all
clc
FDhunt=[1.2325 1.1146 1.1457 1.1715 1.0976 1.1358 1.1170 1.1388 1.0797 1.1769 1.1261
1.1057 1.1174 1.0680 1.0626 1.1831 1.1437 1.1129 1.1647 1.1779];
FDpark=[1.2653 1.0933 1.0721 1.1265 1.1373 1.0905 1.1923 1.0986 1.0668 1.1751 1.0664
1.0686 1.1467 1.1610 1.1208];
FDals=[1.1867 1.2936 1.1863 1.1311 1.0973 1.1368 1.1777 1.1337 1.1233 1.1553 1.1637
1.1357 1.0267];
indexHunt=[8 11 4 2 10 8 2 9 12 4 11 8 5 12 3 5 12 2 1 9];
indexPark=[4 1.5 2 3.5 2 2 4 4 1.5 3 3 3 3 3 2.5];
indexALS=[1 14 13 54 5.5 17 9 3 54 14.5 7 12 34];
figure,
x=indexHunt';
y=FDhunt';
outliers = excludedata(x,y,'range',[1.07 1.23]);
ftype = fitype('a*x+b');
opts = fitoptions('Method','NonLinear','excl',outliers,'Start',[1 1]);
fit1 = fit(x,y,ftype,opts);
subplot(2,1,1)
plot(fit1,'k-',x,y,'b.',outliers,'ro');
title('korelacija između ozbiljnosti bolesti i Fraktalne dimenzije kod Huntington-
a')
xlabel('index koji ukazuje na ukupni funkcionalni kapacitet pacijenta');
ylabel('Fraktalna dimenzija');
subplot(2,1,2)
plot(fit1,'k-',x,y,'b.','predfunc',0.99);
title('99% granice pouzdanosti i predikcije za Fraktalnu Dimenziju');
xlabel('index koji ukazuje na ukupni funkcionalni kapacitet pacijenta');
ylabel('Fraktalna dimenzija');
figure,
x=indexPark';

```

```

y=FDpark';
outliers = excludedata(x,y,'range',[1.07 1.23]);
ftype = fitype('a*x+b');
opts = fitoptions('Method','NonLinear','excl',outliers,'Start',[1 1]);
fit1 = fit(x,y,ftype,opts);
subplot(2,1,1)
plot(fit1,'k-',x,y,'g*',outliers,'ro');
title('korelacija izmedju ozbiljnosti bolesti i Fraktalne dimenzije kod Parkinsona-
a')
xlabel('Hohn i Yahr index');
ylabel('Fraktalna dimenzija');
subplot(2,1,2)
plot(fit1,'k-',x,y,'g*','predfunc',0.99);
title('99% granice pouzdanosti i predikcije za Fraktalnu Dimenziju');
xlabel('Hohn i Yahr index');
ylabel('Fraktalna dimenzija');
figure,
x=indexALS';
y=FDals';
outliers = excludedata(x,y,'range',[1.07 1.23]);
ftype = fitype('a*x+b');
opts = fitoptions('Method','NonLinear','excl',outliers,'Start',[1 1]);
fit1 = fit(x,y,ftype,opts);
subplot(2,1,1)
plot(fit1,'k-',x,y,'g*',outliers,'ro');
title('korelacija izmedju ozbiljnosti bolesti i Fraktalne dimenzije kod ALS-a')
xlabel('proteklo vrijeme od pojavljivanja bolesti');
ylabel('Fraktalna dimenzija');
subplot(2,1,2)
plot(fit1,'k-',x,y,'g*','predfunc',0.99);
title('99% granice pouzdanosti i predikcije za Fraktalnu Dimenziju');
xlabel('proteklo vrijeme od pojavljivanja bolesti');
ylabel('Fraktalna dimenzija');

```

## LITERATURA

[1] Hausdorff JM, Peng C-K, Ladin Z, Wei JY, Goldberger AL. Is walking a random walk? Evidence for long-range correlations in the stride interval of human gait. *J Appl Physiol* 1995;78:349-358.

[2] Peng C-K, Hausdorff JM, Goldberger AL. Fractal Mechanisms in Neural Control: Human Heartbeat and Gait Dynamics in Health and Disease In: Walleczek J, ed. *Nonlinear Dynamics, Self-Organization, and Biomedicine* Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[3] Hausdorff JM, Purdon P, Peng C-K, Ladin Z, Wei JY, Goldberger AL. Fractal dynamics of human gait: stability of long-range correlations in stride interval fluctuations. *J Appl Physiol* 1996;80:1448-1457.

[4] Hausdorff JM, Mitchell SL, Firtion R, Peng C-K, Cudkowicz ME, Wei JY, Goldberger AL. Altered fractal dynamics of gait: reduced stride interval correlations with aging and Huntington's disease. *J Appl Physiol* 1997;82:262-269.

[5] Irini S.Reljin, Branimir D. Reljin, Fractal geometry and multifractals in analysing and processing medical data and images, *Archive of Oncology* 2002 ; 10(4) : 283-293

[6] T. Higuchi, Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory, *Physica D* vol. 31 (1988) pp.277-283

[7] T. Higuchi, Relation between the fractal dimension and the power-law index for a time series : a numerical investigation, *Physica D* vol. 46 (1990) pp.254-264

[8] Chhabra A, Jensen R. Direct determination of the  $f(\alpha)$  singularity spectrum. *Phys Rev Lett*. 1989; 62:1327.

[9] Ivanov PCh, Amaral LAN, Goldberger AL, Stanley HE. Stochastic feedback and the regulation of biological rhythms. *Europhys Lett* 1998;43:363-368.

[10] R. Esteller, G. Vachtsevanos, J. Echauz, B. Litt, A Comparison of fractal dimension algorithms using synthetic and experimental data

[11] Scafetta N., Griffin L., West B.J., Holder exponent spectra for human gait, *Physica A* 2003; 328: 561-583.

[12] West B.J., Scafetta N., A nonlinear model for human gait, *Phys. Rev. E* 2003; 67:051917-1.

[13] Sve analizirane vremenske serije koračnih intervala su javno dostupne na <http://www.physionet.org>

[14] Hausdorff J.M., Mitchell S.L., Firtion R., Peng C.-K., Cudkowicz M.E., Wei J.Y., Goldberger A.L., Altered fractal dynamics of gait: reduced stride interval correlations with aging and Huntington's disease, *J Appl. Physiol.* 1997; 82:262-269.

[15] A Muñoz-Diosdado, A non linear analysis of human gait time series based on multifractal analysis and cross correlations, *Journal of Physics: Conference Series* 23 (2005) 87–95

[16] J.M. Hausdorff, Y. Ashkenazy, C-K. Peng, P.C. Ivanov, H.E. Stanley and A.L. Goldberger, When Human Walking Becomes Random Walking: Fractal Analysis and Modeling of Gait Rhythm Fluctuations, *Physica A* 302 138-147 (2001)

[17] J.B. Bassigthwaighte, L.S. Liebowitch and B.J. West, *Fractal Physiology*, Oxford University Press, Oxford (1994)